02.08. DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

Damián Gulich

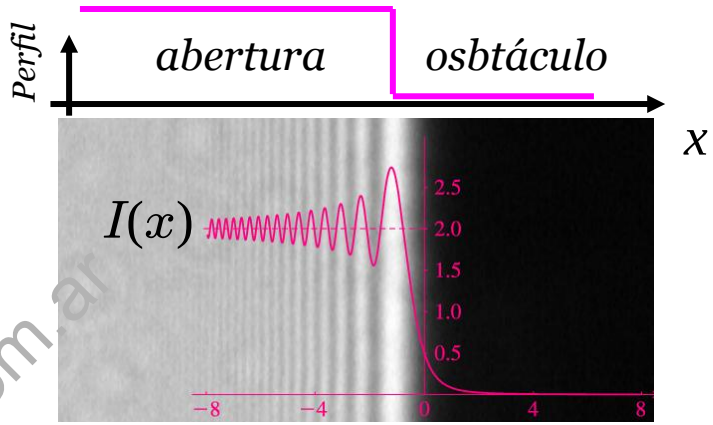
2020

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

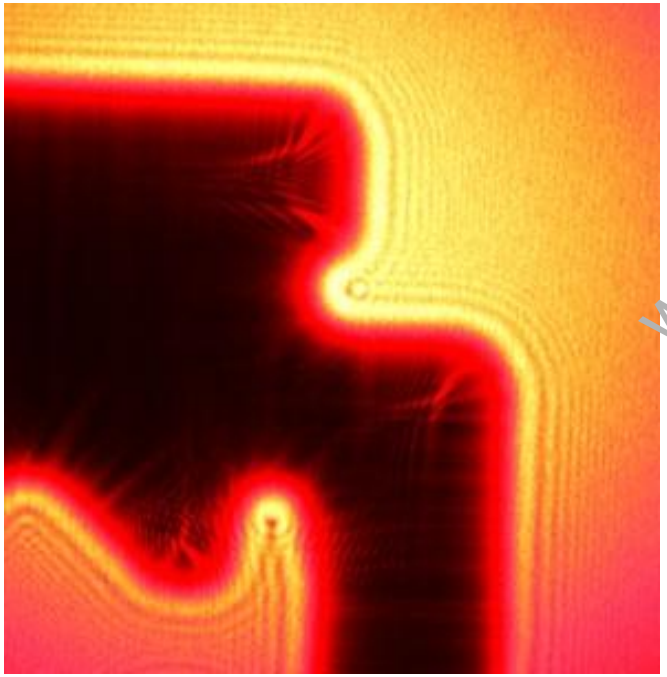
Difracción

La *difracción* es un fenómeno característico de las ondas que se basa en la desviación de éstas al encontrar un obstáculo o al atravesar una rendija. Es decir, es un efecto *de bordes*.

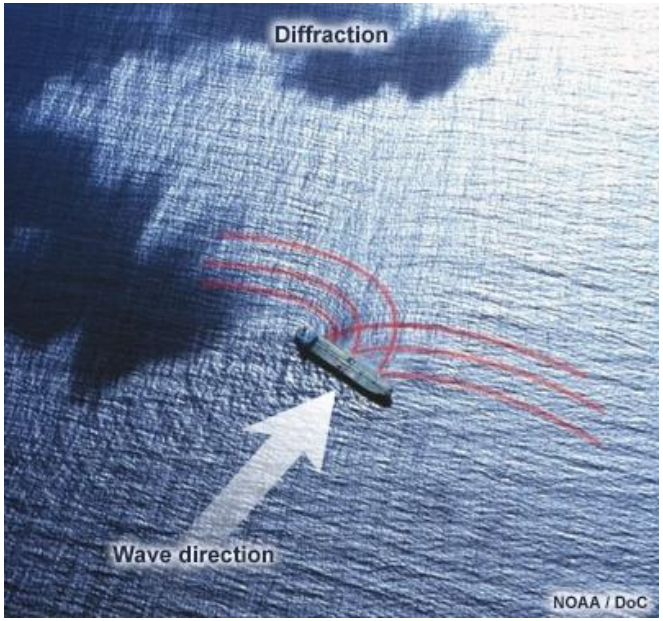
La difracción ocurre en todo tipo de ondas, desde ondas sonoras, ondas en la superficie de un fluido y ondas electromagnéticas como la luz visible y las ondas de radio.



Luz que pasa por el borde



Sombra de una hoja de afeitar iluminada por un láser helio-neón.



Difracción ondas en el agua pasando por un barco.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Pincipio de Huygens-Fresnel

"Cada punto sin obstrucción de un frente de onda , en un instante de tiempo determinado, sirve como fuente de trenes de onda secundarios esféricos (de la misma frecuencia que la onda primaria). La amplitud del campo óptico en cualquier punto más allá es la superposición de todos estos frentes de onda (considerando sus amplitudes y fases relativas)."

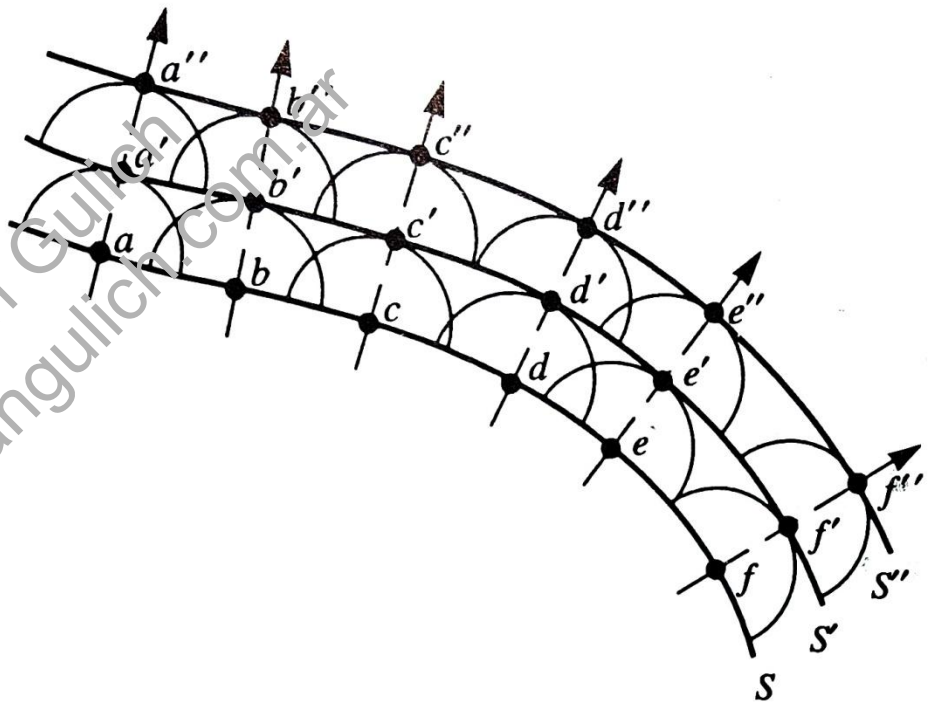


Figura 35.2 Construcción de Huygens para una onda progresiva.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Condiciones de Fraunhofer

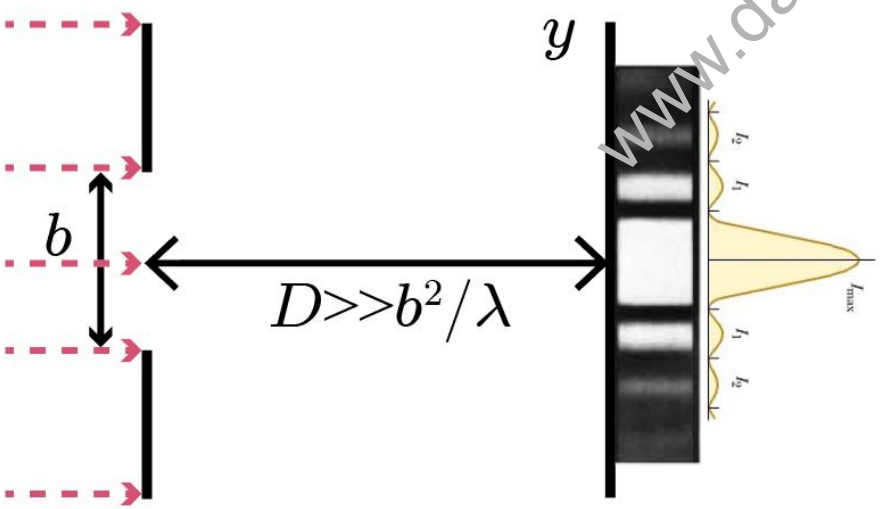
Consideramos *luz coherente* que llega como *onda plana* (de longitud de onda λ) a una rendija de ancho b y que cada punto de la abertura se comporta como una pequeña fuente de luz (*principio de Huygens*). Se observa el mismo patrón sobre una pantalla si:

A. Campo lejano
La distancia D entre la rendija y la pantalla cumple que $D \gg \dfrac{b^2}{\lambda}$

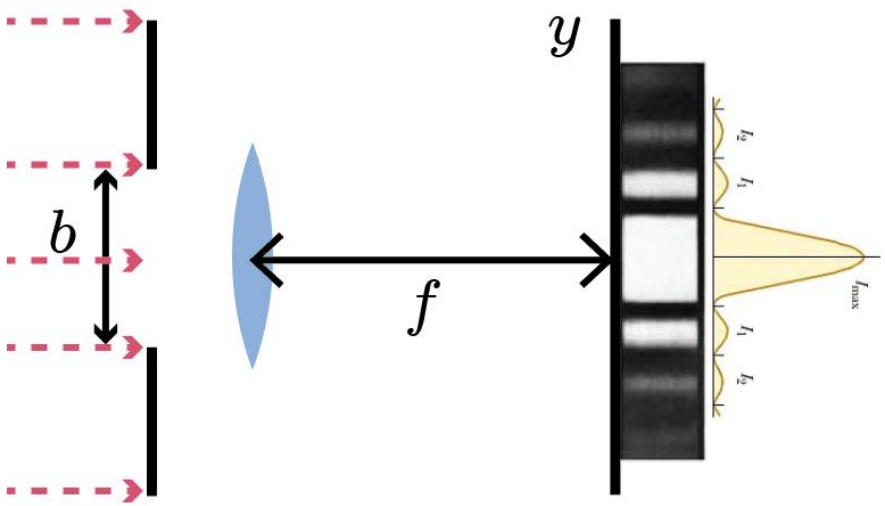
B. Plano focal de una lente convergente
Se pone una lente convergente después de la ranura y la distancia entre ésta y la pantalla es exactamente la distancia focal de la lente: f.

© Damian Gulich
www.damiangulich.com.ar

A. Campo lejano



B. Plano focal de una lente convergente



¿Por qué es difícil ver la difracción?

La difracción tiende a causar efectos en los bordes y como en el caso de la interferencia la presencia de este efecto depende de la *coherencia* de la fuente.

Ejemplo: una fuente espacialmente incoherente (Sol) arroja sombras borrosas, enmascarando los efectos de difracción.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

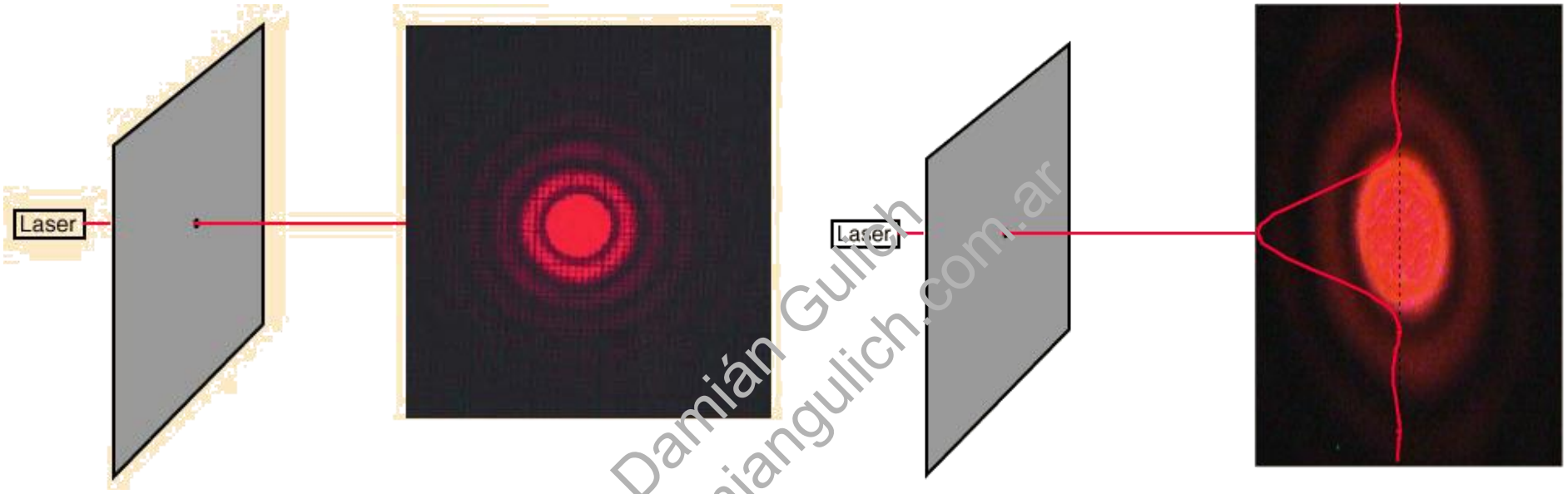
El espacio entre las hojas de los árboles puede interpretarse como una rendija.
La mancha de luz en el piso es difusa pero no muestra la distribución de difracción ya que el sol es una fuente incoherente.

Nota: de hecho, cada mancha es una pequeña imagen del Sol.

Difracción de una abertura circular

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

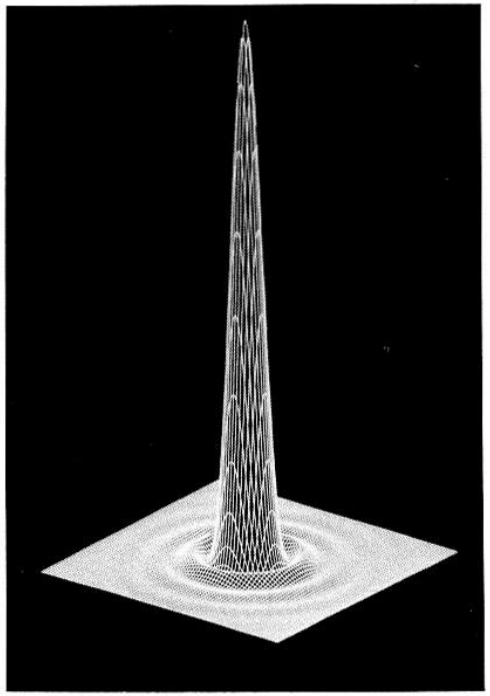
Patrón de difracción por una abertura circular



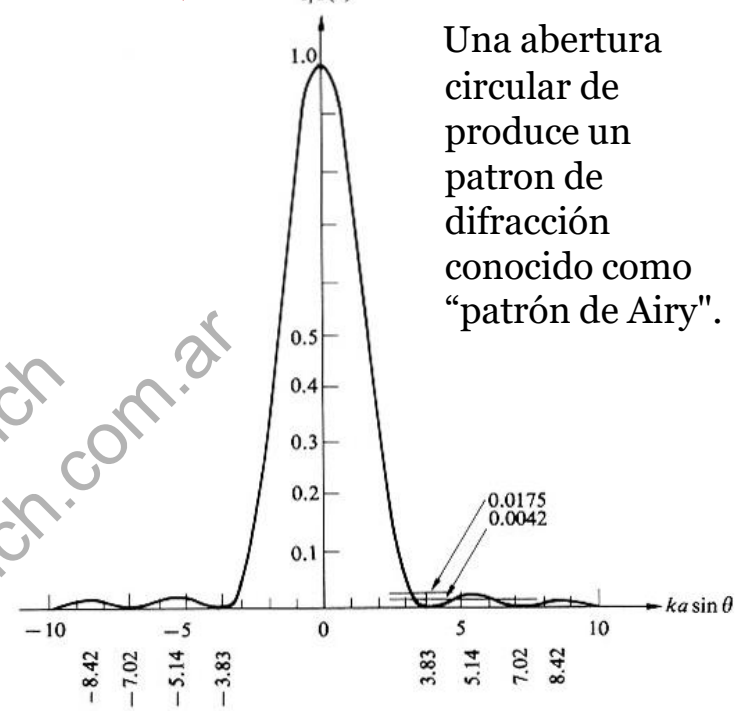
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Cuando la luz de una fuente pasa a través de una pequeña abertura circular de diámetro w, no produce un punto brillante como imagen, sino un disco circular difuso conocido como *disco de Airy* mucho más débil rodeado por anillos concéntricos circulares.
Este ejemplo de difracción es de gran importancia porque el ojo y muchos instrumentos ópticos tienen aberturas circulares. En general se dice que **todo sistema óptico está limitado por difracción**.

Patrón de difracción por una abertura circular

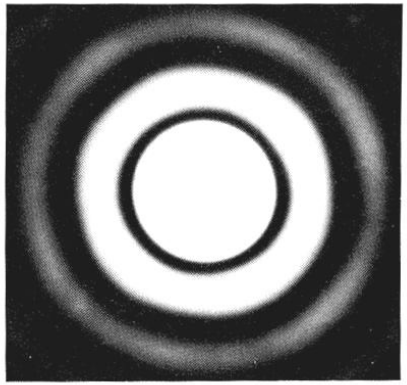


Intensidad

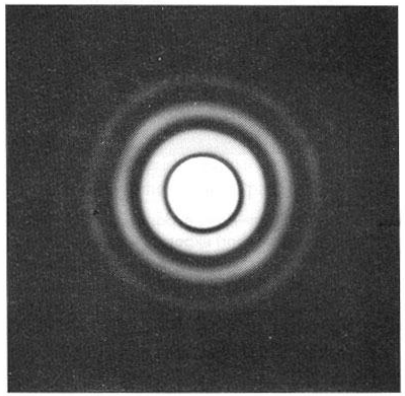


Una abertura circular de produce un patron de difracción conocido como “patrón de Airy".

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

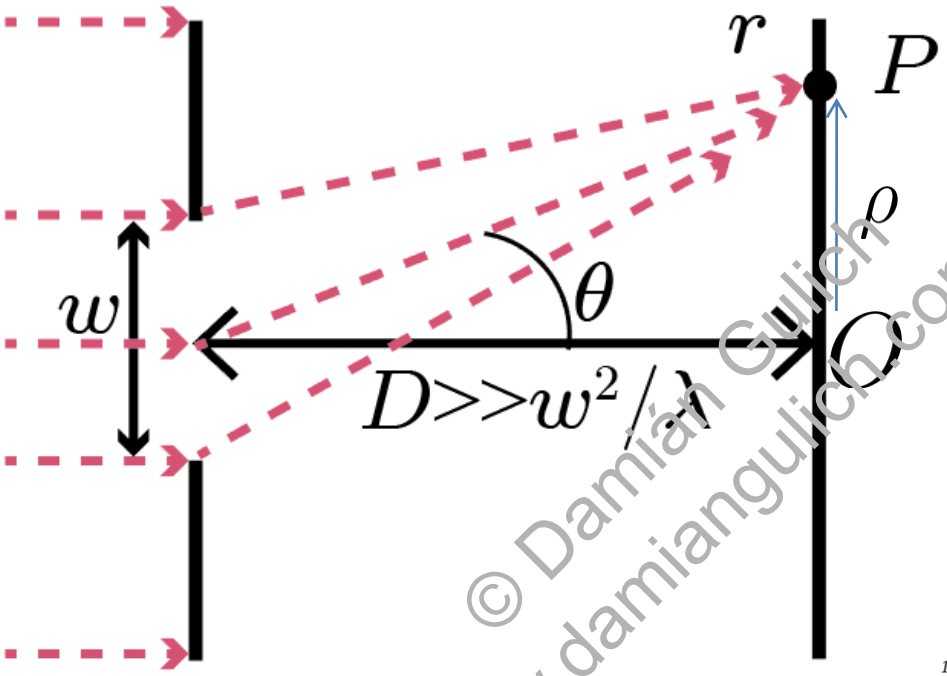


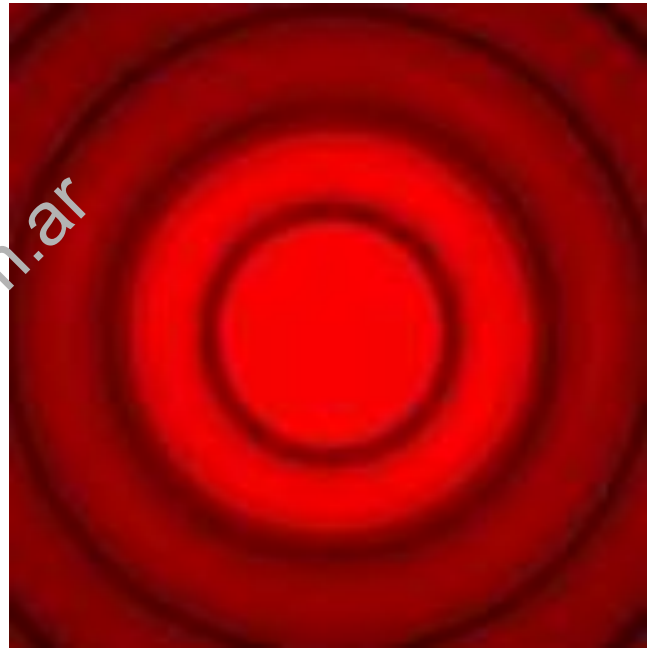
Patrón de difracción producido por una pequeña abertura

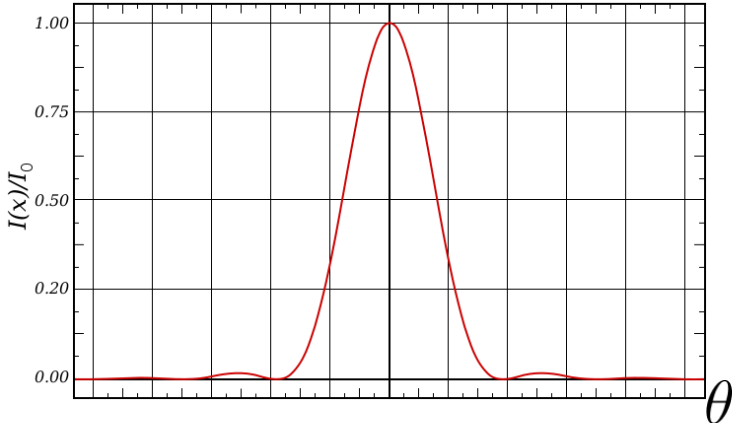


Patrón de difracción producido por una gran abertura

Patrón de difracción por una abertura circular – Expresión analítica de la intensidad







© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

$$I(\theta) = I(0)\left[\frac{J_1(k\,w\,\mathrm{sen}(\theta)/2)}{k\,w\,\mathrm{sen}(\theta)}\right]^2$$

Donde $J_1(\ldots)$ es una función especial: la función de Bessel.

Una zona importante: el primer mínimo

Para una abertura circular de diámetro w, el primer mínimo de intensidad se encuentra numéricamente en

$$\boxed{\operatorname{sen}(\theta_{\min}) \simeq \theta_{\min} \simeq 1{,}22\,\frac{\lambda}{w}} \qquad \text{(rad)}$$

Con esto se puede encontrar el radio del primer anillo oscuro, que se considera en términos prácticos como la extensión del disco de Airy.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Límite de difracción

La difracción limita la resolución de objetos vistos a través de un sistema óptico:
por ejemplo, en un telescopio refractor tradicional en el rango del visible no todas las estrellas cercanas son distinguibles.

Para obtener mayores resoluciones

- Se requieren mayores diámetros
- Menores longitudes de onda

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

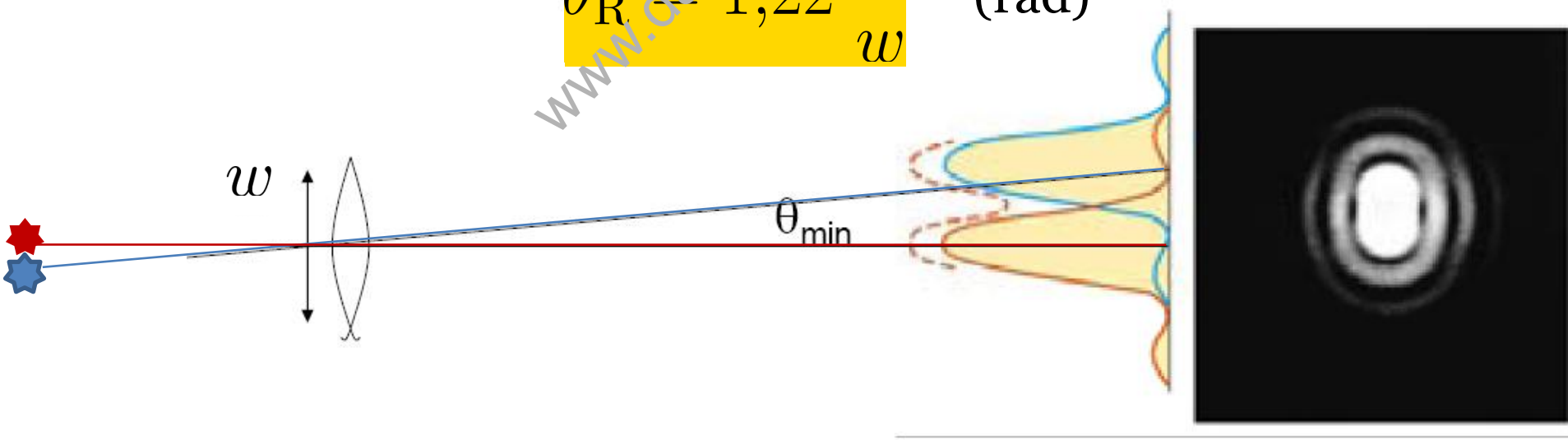
Criterio de Rayleigh (abertura circular)

La difracción por aberturas circulares es de gran importancia porque el ojo y muchos instrumentos ópticos tienen este tipo aberturas. Esta limitación en la resolución de las imágenes se cuantifica en términos del *criterio de Rayleigh* con el que la resolución límite de un sistema puede ser calculado:

> Para resolver dos objetos (fuentes incoherentes entre sí) por una lente circular de diámetro w (que es la abertura) el limite de difracción de resolución ocurre cuando el máximo de intensidad de la imagen del segundo objeto se localiza en la posición del primer mínimo del patrón de difracción del primer objeto

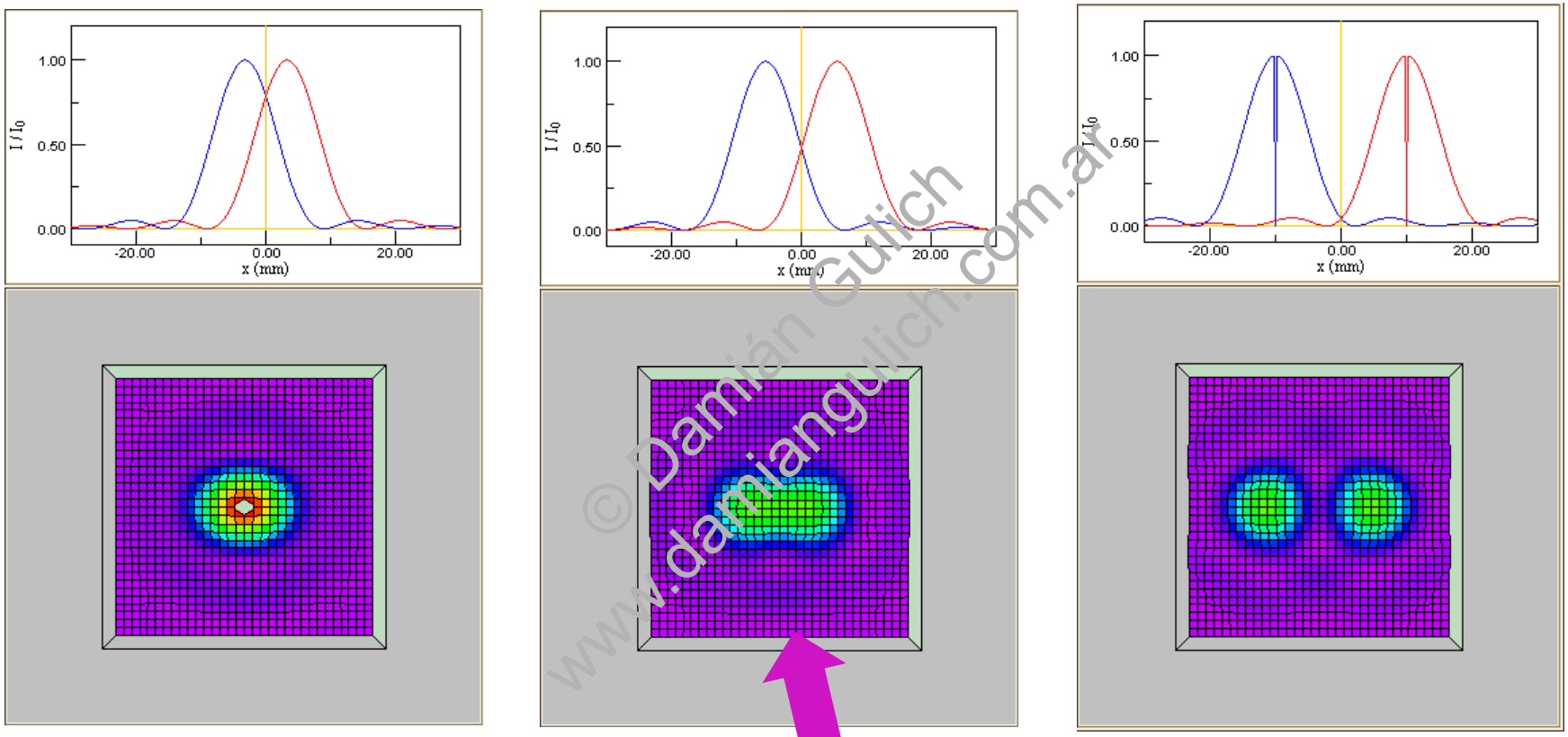
$$\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{w} \quad \text{(rad)}$$

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar



Poder resolvente (abertura circular)

El hecho de que la imagen formada por una lente es un patrón de difracción es importante cuando se trata de resolver objetos distantes



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Cuando la separación angular entre dos objetos es tal que el máximo central del patrón de difracción de uno de los objetos coincide con el primer mínimo del otro objeto tenemos una condición para la *resolubilidad*

$$\theta_{\mathrm{R}} = \mathrm{sen}^{-1}\left(1{,}22\,\frac{\lambda}{w}\right) \approx 1{,}22\,\frac{\lambda}{w}$$

El ojo humano

- Suponiendo λ=500 nm y un diámetro de pupila de w=3 mm, entonces el ángulo de resolución esperado para el ojo humano es

$$\theta_R = 41{,}9''$$

- Dos puntos luminosos a 1 mm de distancia pueden resolverse idealmente a 6 m. Los defectos visuales acortan esta distancia.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Telescopios

- Suponiendo λ=500 nm y un diámetro de pupila de w=3 cm, entonces el ángulo de resolución esperado para un telescopio de juguete es

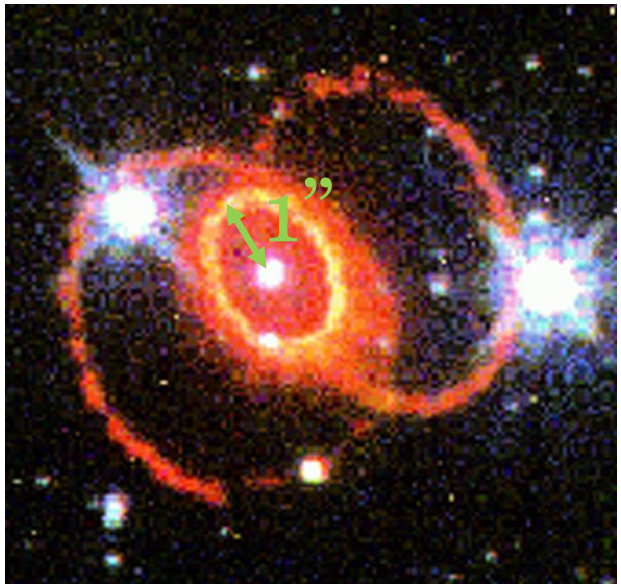
$$\theta_R = 3{,}43''$$

- El telescopio espacial Hubble tiene un diámetro w=2,4 m, y por lo tanto puede resolver objetos con

$$\theta_R = 0{,}043''$$

Un telescopio en tierra con el mismo diámetro sólo resuelve entre 0,5" y 2" por la turbulencia atmosférica.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

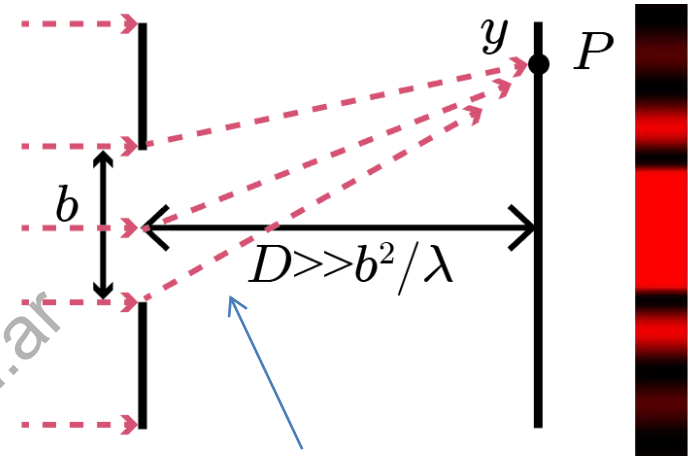


Difracción de una rendija rectangular

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

1. Difracción de una única rendija rectangular

Cada punto de la abertura actúa como una fuente de ondas esféricas (principio de Huygens). Se suman ondas de igual λ con diferentes fases y el medio de propagación siempre es el aire (n=1). Nos interesa la interferencia de los rayos que salen **paralelos** de la ranura (esto se logra en condiciones de campo lejano o con lente).

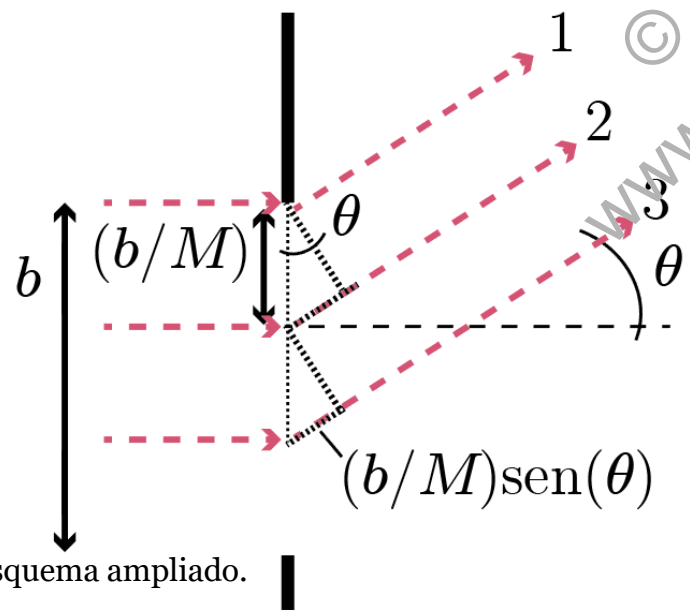


Estos rayos salen aproximadamente paralelos, el esquema está exagerado.

Si consideramos que podemos dividir la abertura en M segmentos con fuentes equidistantes de igual polarización e intensidad, entonces la diferencia de fase para dos rayos consecutivos que llegan al punto P de la pantalla es

$$\delta_{i,i+1} \equiv \delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r_{i,i+1} = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{b}{M}\text{sen}(\theta)\right], \quad \text{si } \theta \sim 0, \text{ (región central)}$$

Por ejemplo, si M= 3 fuentes (rayos)



Esquema ampliado.

Sabemos que $I(P) \propto E_{0T}^2(P)$.

$$E_{0T}(P) = E_1(P) + E_2(P) + E_3(P)$$

Todos tienen amplitud E_0, pero difieren en la fase.

Tomando al rayo 1 como referencia:

$$E_{0T}(P) = E_0\,\text{sen}(\gamma) + E_0\,\text{sen}(\gamma+\delta) + E_0\,\text{sen}(\gamma+2\delta)$$

$$(\gamma = kr - \omega t)$$

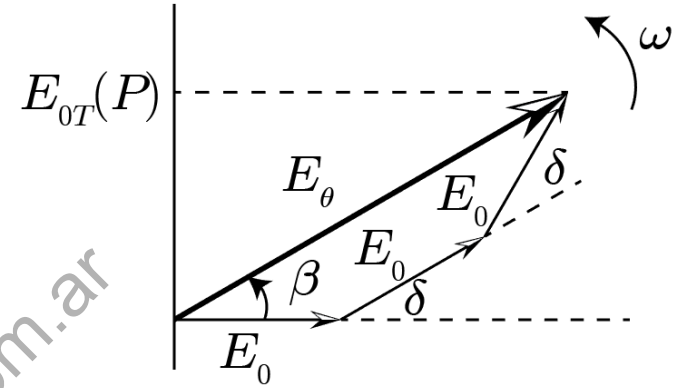
¡Es el problema de sumar corrientes alternas!
Algebráicamente es engorroso, pero con fasores no.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Método de fasores para hallar $E_{0T}(P)$

Como en Física II para los problemas de corriente alterna, deseamos saber la suma de varias magnitudes que oscilan con frecuencia ω y que difieren entre sí en determinada fase fija. Deseamos hallar la amplitud total de la suma, y su ángulo de desfasaje respecto de la referencia.
Por eso trataremos al campo E_0 de cada fuente en P como un *fasor* y tomaremos el primer rayo como referencia. La diferencia de fase total β es

Caso M=3



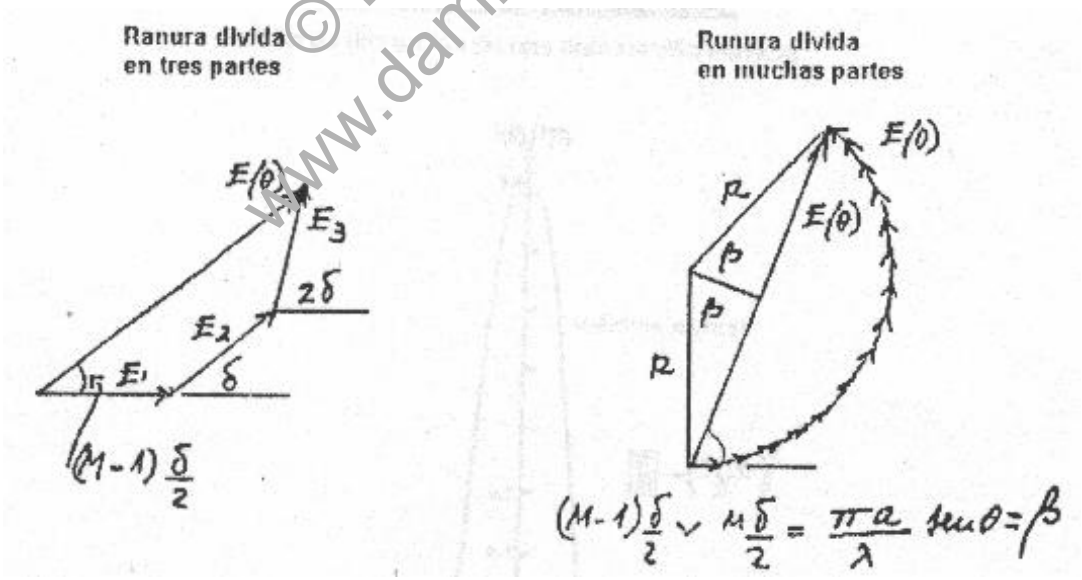
$$\beta = (M-1)\frac{\delta}{2} \approx \frac{M}{2}\delta \quad \text{(si } M \text{ es muy grande)}$$

$$\Longrightarrow \beta = \frac{M}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{b}{M}\operatorname{sen}(\theta)\right]$$

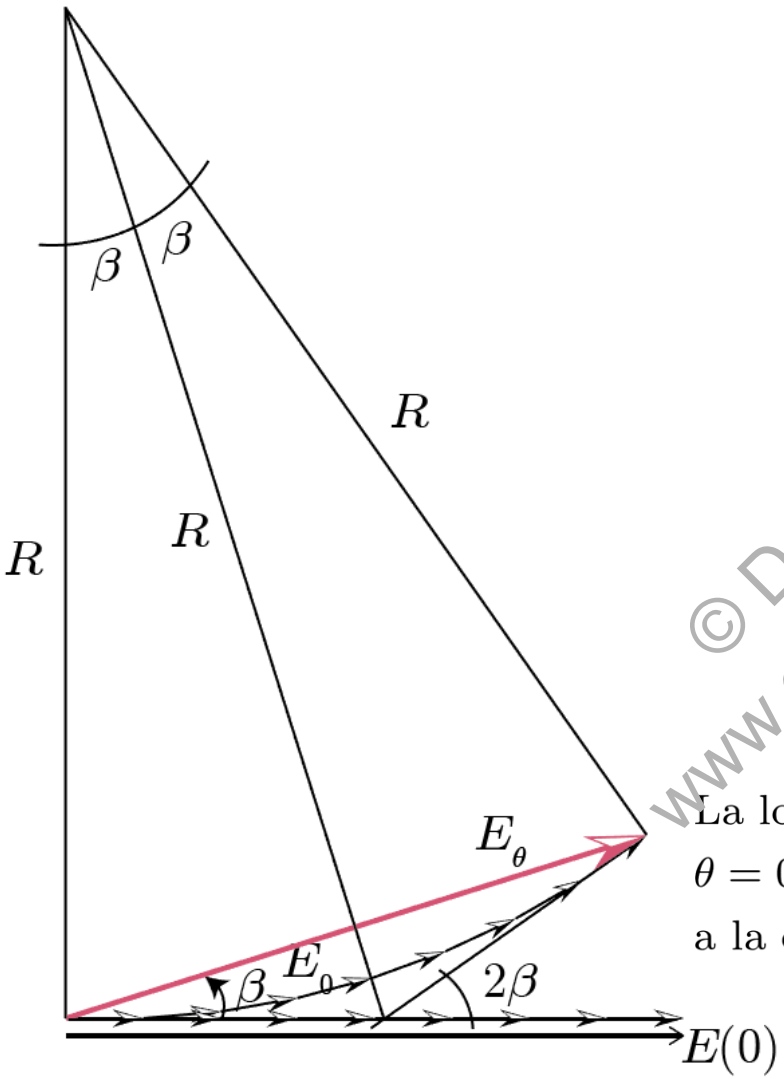
$$\boxed{\Longrightarrow \beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)\operatorname{sen}(\theta)}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{b}{M}\operatorname{sen}(\theta)\right]$$

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar



Método de fasores para hallar $E_{0T}(P)$ – Muchos fasores



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

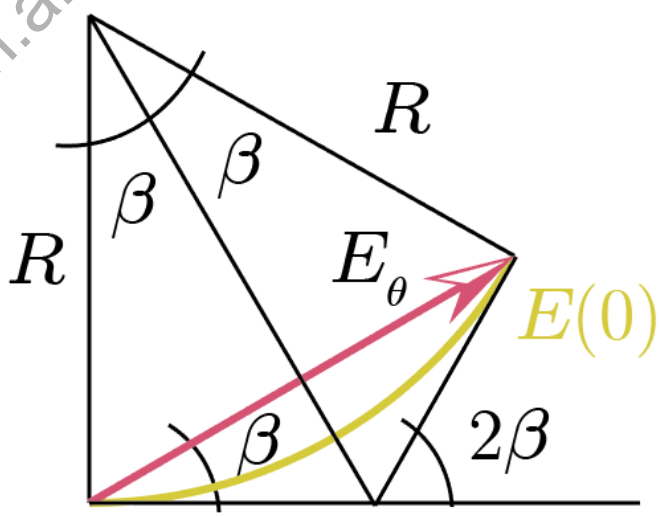
La longitud de de arco (poligonal) es el campo para $\theta = 0$, es decir cuando todos los rayos llegan en fase a la distancia D sobre el eje de simetría (fasores alineados).

Método de fasores para hallar $E_{0T}(P)$ – Paso al infinito

La amplitud del campo y la intensidad en cualquier punto de la pantalla puede calcularse considerando ranura dividida M partes con $M \to \infty$. En ese caso, la cadena de fasores es una curva lisa.

Si R es el radio de la circunferencia donde está inscripta la poligonal, E_θ mide:

$$E_\theta = 2R\,\mathrm{sen}(\beta)$$



La longitud de de arco (poligonal) es el campo para $\theta = 0$, es decir: cuando todos los rayos llegan en fase a la distancia D sobre el eje de simetría (fasores alineados) resulta:

$$E(0) = 2R\beta \Longrightarrow 2R = \frac{E(0)}{\beta}$$

Reemplazando arriba:

$$\boxed{E_\theta = E(0)\frac{\mathrm{sen}(\beta)}{\beta}}$$

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

La intensidad sobre la pantalla

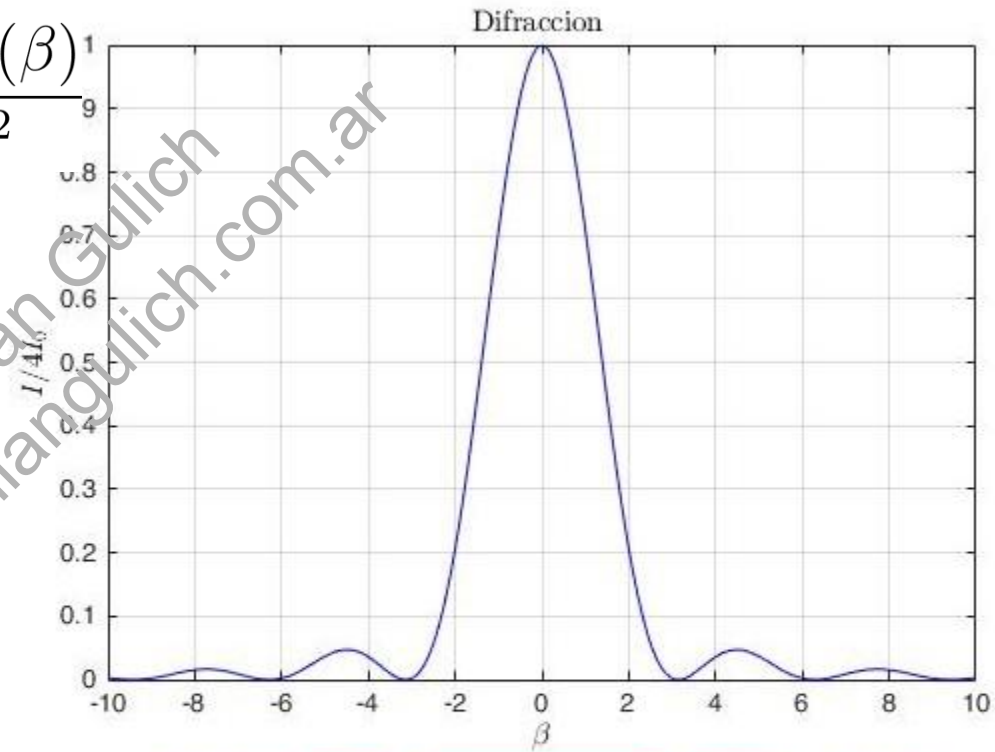
Como en general $I = c\varepsilon_0 E_0^2/2$:

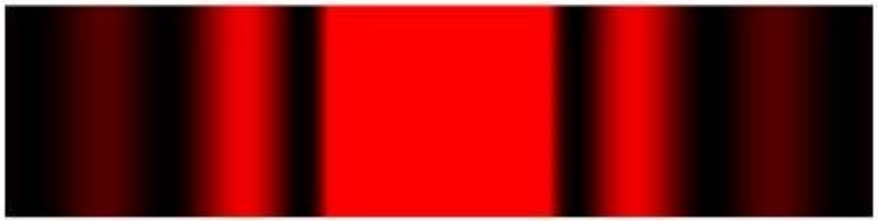
$$I(\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_\theta^2 = \frac{c\varepsilon_0}{2} E(0)^2 \frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I(\theta) = I(0)\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right) \mathrm{sen}(\theta)$$





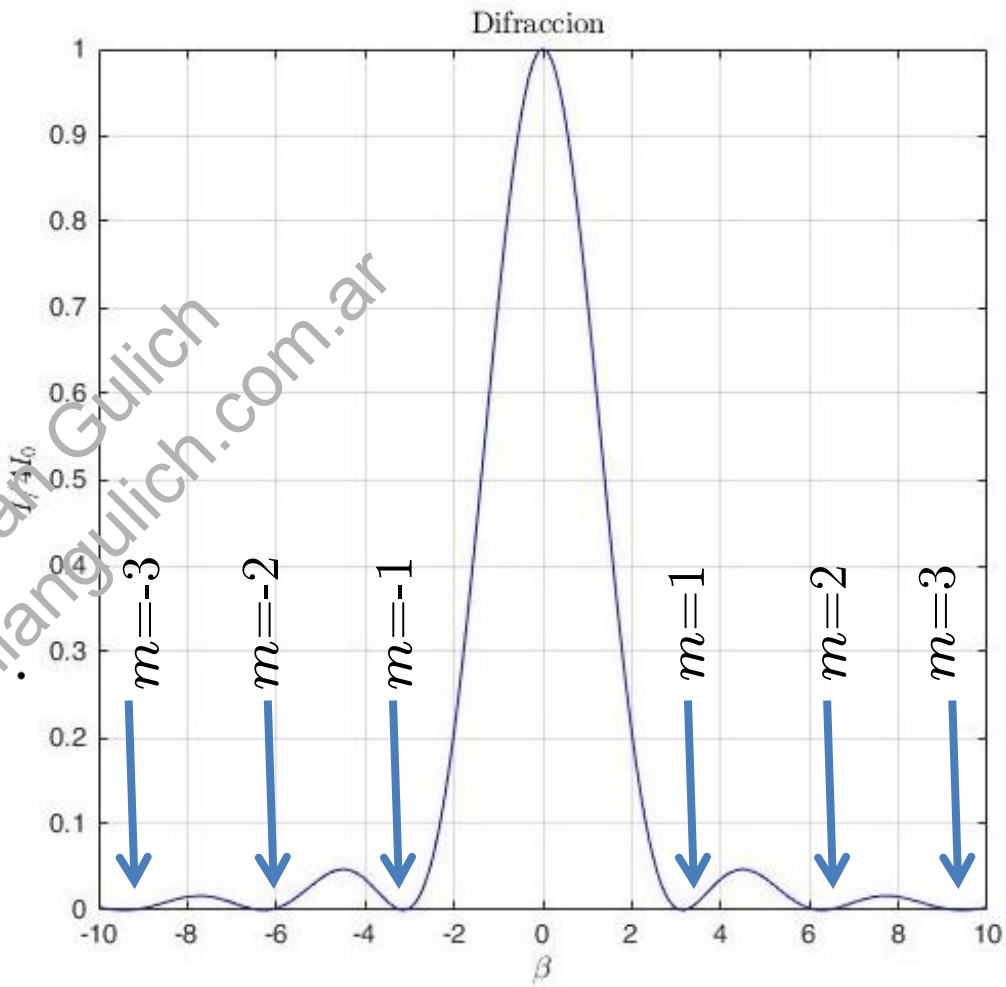
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Máximos y mínimos de intensidad sobre la pantalla

$$I(\theta) = I(0)\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)\ \mathrm{sen}(\theta)$$



Condición de mínimo:

$$\beta = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Longrightarrow \mathrm{sen}(\theta) = k\frac{\lambda}{b}$$

Condición de máximo (1°):

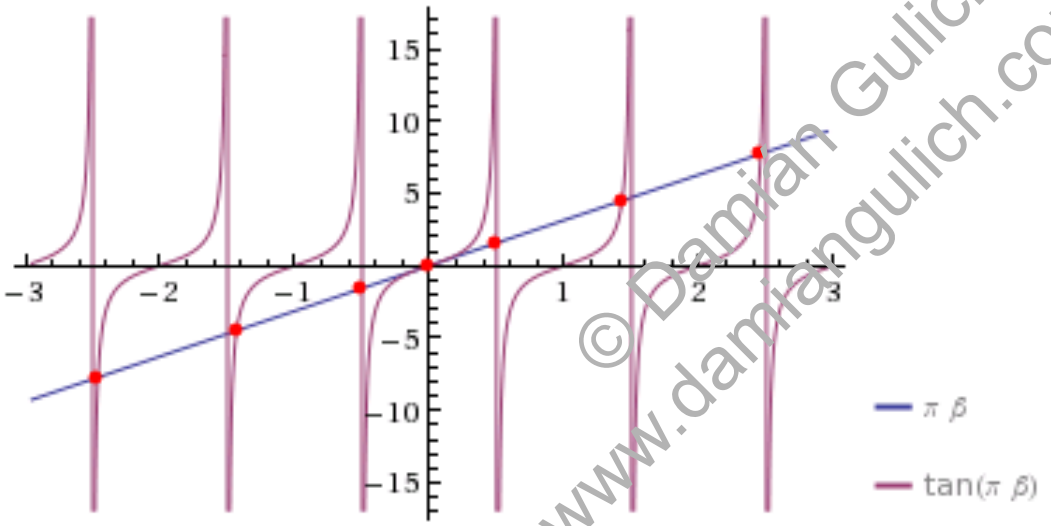
$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\mathrm{sen}(\beta)}{\beta}\right) = 0 \iff \boxed{\beta = \tan(\beta)}$$

Ecuación trascendental

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Máximos de intensidad sobre la pantalla, resolución de la ecuación trascendental

La ecuación $\beta = \tan(\beta)$ es trascendental y se resuelve gráfica o numéricamente.



Numerical solutions:

$\beta \approx \pm 3.47088972434702\ldots$

$\beta \approx \pm 2.45902403295676\ldots$

$\beta \approx \pm 1.43029665312420\ldots$

$\beta \approx 4.47740858343252\ldots$

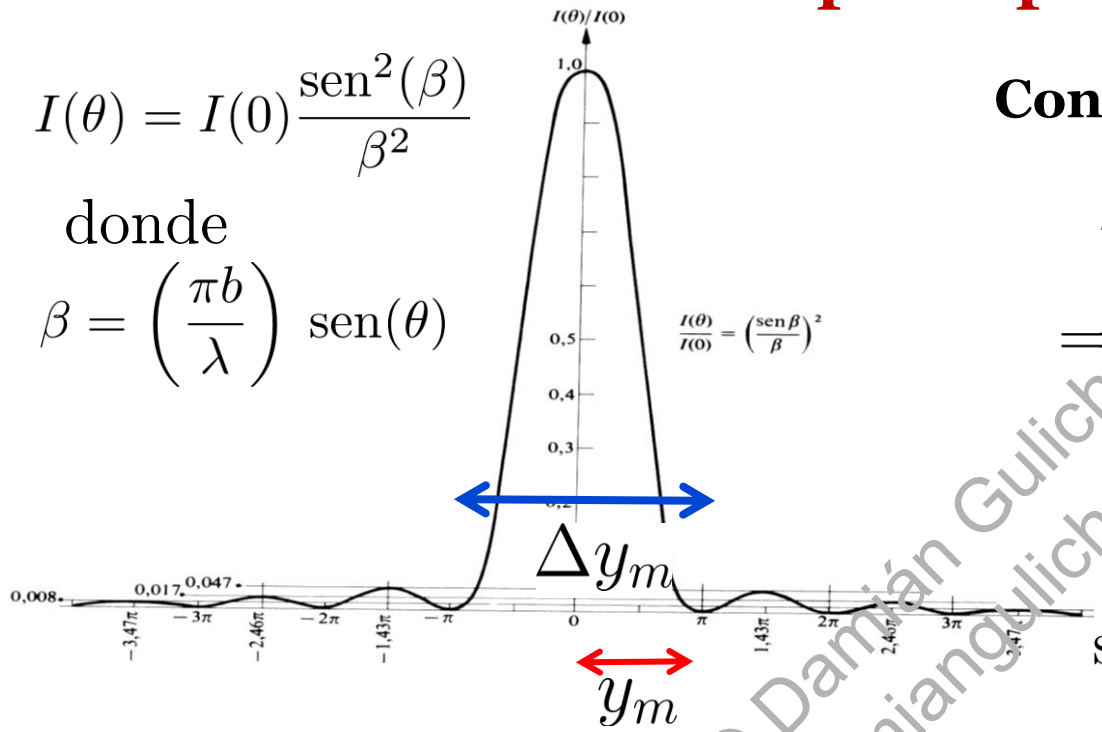
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

El ancho del lóbulo principal sobre una pantalla

$$I(\theta) = I(0)\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)\ \mathrm{sen}(\theta)$$



Condición de mínimo:

$$\beta = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Longrightarrow \mathrm{sen}(\theta) = k\frac{\lambda}{b}$$

En la zona central de la pantalla:

$$\mathrm{sen}(\theta) \simeq \tan(\theta) = \frac{y_k^{\text{mín}}}{D} = k\frac{\lambda}{b}$$

$$\Longrightarrow y_k^{\text{mín}} = k\frac{D\lambda}{b} \Longrightarrow \Delta y_k = 2\,D\lambda/b$$

Si en una experiencia se mide el ancho total del primer lóbulo de difracción Δy_k, se puede determinar el ancho de la ranura

$$\Longrightarrow b = \frac{2\,D\lambda}{\Delta y_k}$$

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

El ancho del lóbulo principal es función inversa del ancho de la ranura

$$\Delta y_k = \frac{2\,D\lambda}{b}$$

Difracción e interferencia de dos rendijas rectangulares

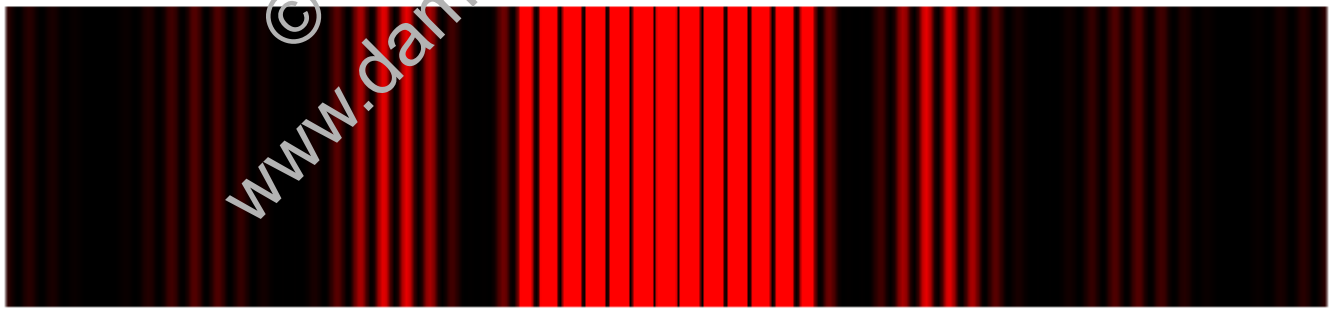
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Difracción producida por una y dos ranuras

Patrón de difracción de Fraunhofer

Una ranura

Dos ranuras

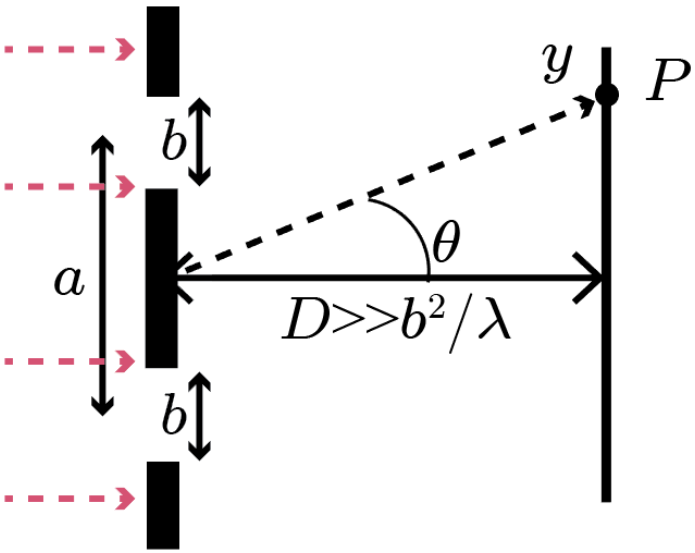


© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Hasta ahora en el experimento de Young no consideramos el efecto de la difracción

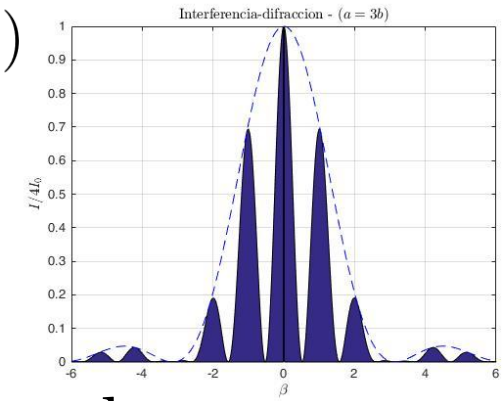
Patrón de difracción-interferencia de una doble ranura

Vimos que la experiencia de Young (dobles ranuras puntuales separadas una distancia a) da un perfil angular de intensidad:



$$I(\theta) = 4I_0^{\text{Young}} \cos^2(\alpha)$$

donde $\alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) \text{sen}(\theta)$



En condiciones de Fraunhofer, se considera el ancho b de cada ranura que experimenta difracción; es decir:

$$I_0^{\text{Young}} = I_0 \frac{\text{sen}^2(\beta)}{\beta^2} \qquad \text{donde} \qquad \beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right) \text{sen}(\theta)$$

$$\Longrightarrow \boxed{I(\theta) = 4\, I_0 \frac{\text{sen}^2(\beta)}{\beta^2} \cos^2(\alpha)}$$

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Patrón de difracción-interferencia de una doble ranura

$$I(\theta) = 4\, I_0 \frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2} \cos^2(\alpha)$$

difracción interferencia

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right) \mathrm{sen}(\theta) \qquad \alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) \mathrm{sen}(\theta)$$

El factor con α cumple sus ciclos más rápidamente que β, dado que a es mayor que b

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Mínimos de difracción: $\beta = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

Mínimos de interferencia: $\alpha = \pm(m + 1/2)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$

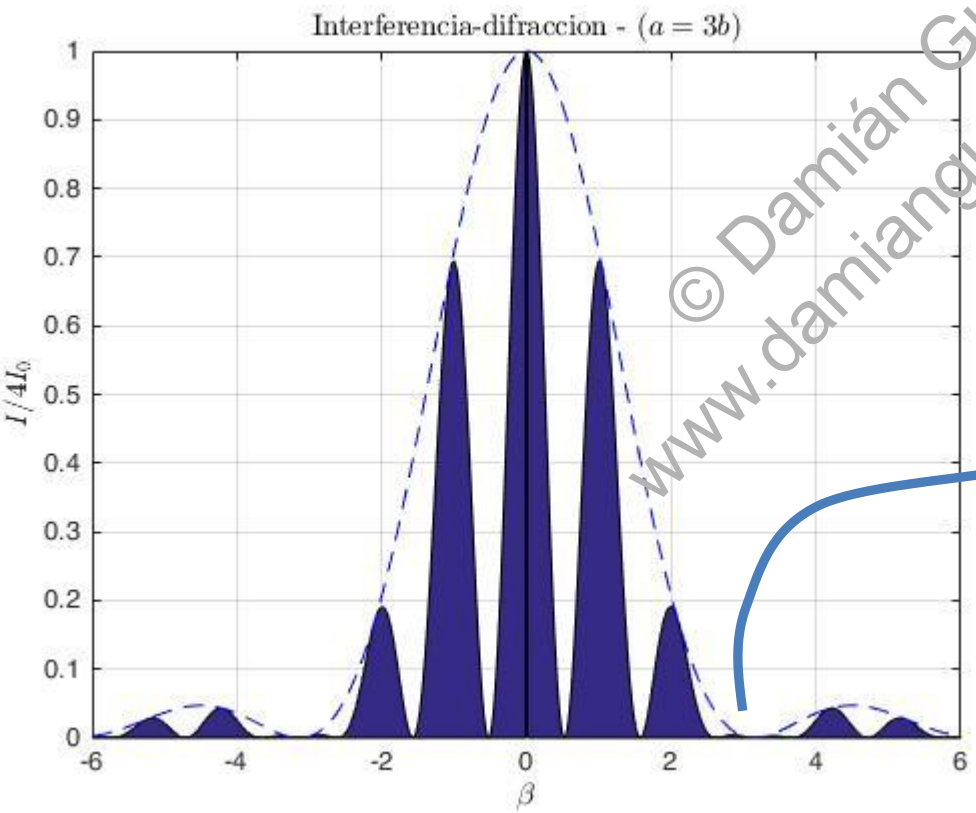
Máximos de interferencia: $\alpha = \pm m\pi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

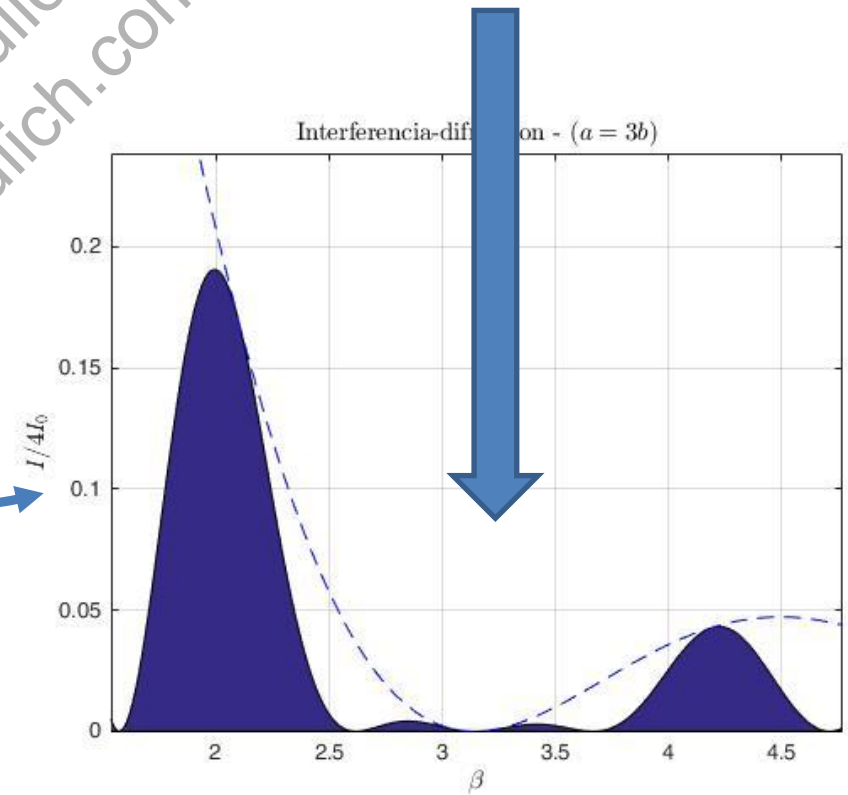
Órdenes perdidos

Un *orden perdido* (u *omitido*) se da cuando un máximo de interferencia coincide con un mínimo de difracción. Sucede siempre que $a=qb$, con q natural.

$$\boxed{a = 3b}$$

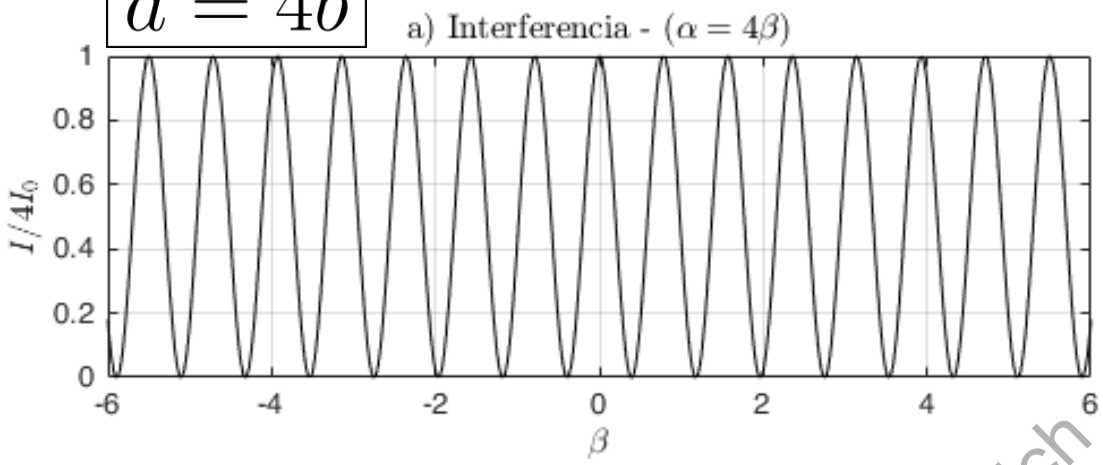
En esta posición el máximo de interferencia coincide con el mínimo de difracción

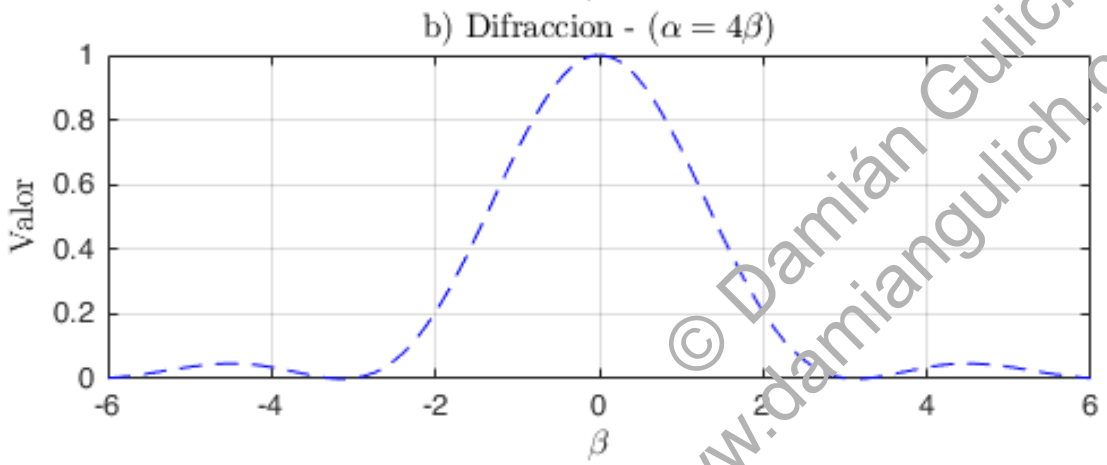


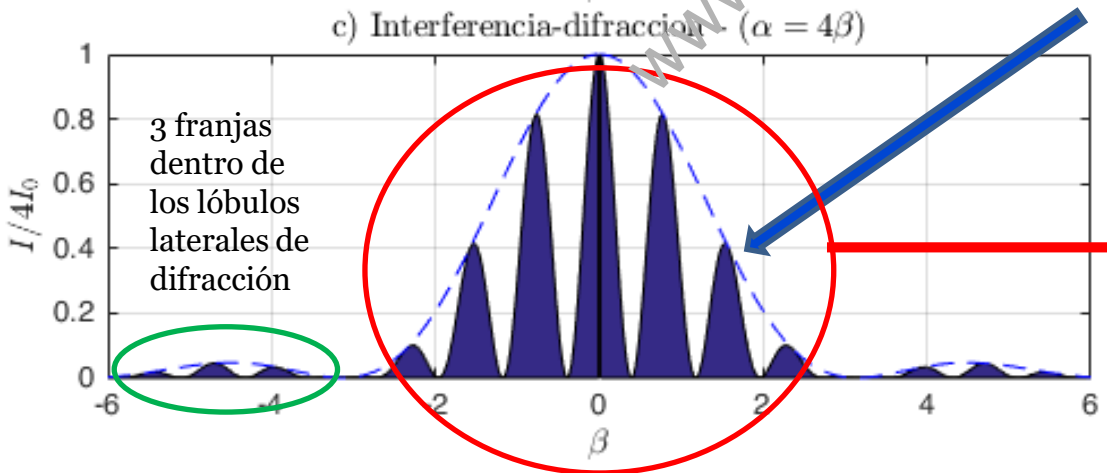


© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

$$a = 4b$$







Si un máximo de interferencia coincide con un mínimo de difracción

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{k}$$

La difracción es una envolvente

7 franjas completas de interferencia dentro del lóbulo central de difracción (4to faltante)

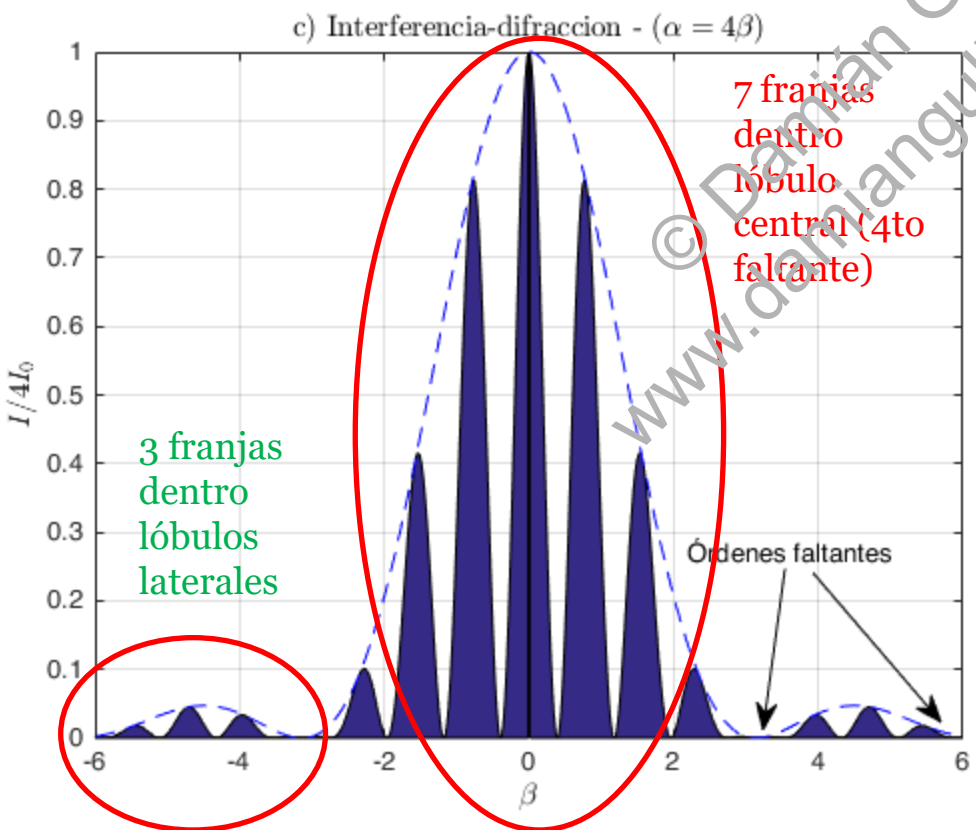
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Cantidad de franjas brillantes de interferencia dentro del pico (lóbulo) central de la envolvente de difracción

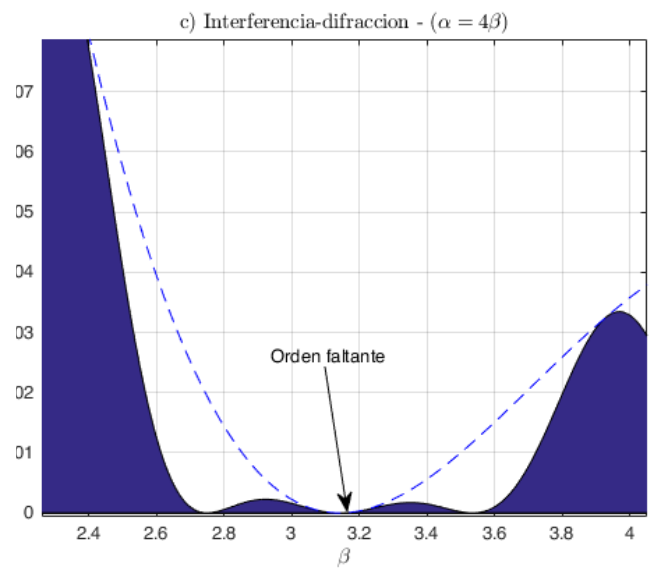
Debemos hallar la cantidad de máximos e interferencia dentro del lóbulo principal de la envolvente de difracción. Supongamos $a=4b$:

1° mínimo de difracción: $\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right) \operatorname{sen}(\theta) = k\pi, \quad (k=1)$

Máximos de interferencia: $\alpha = \left(\frac{\pi 4b}{\lambda}\right) \operatorname{sen}(\theta) = m\pi, \quad m = ?$



En este caso, el orden m=4 de interferencia está frustrado. Tenemos a m=0,1,2 y 3 a ambos lados del máximo central.



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

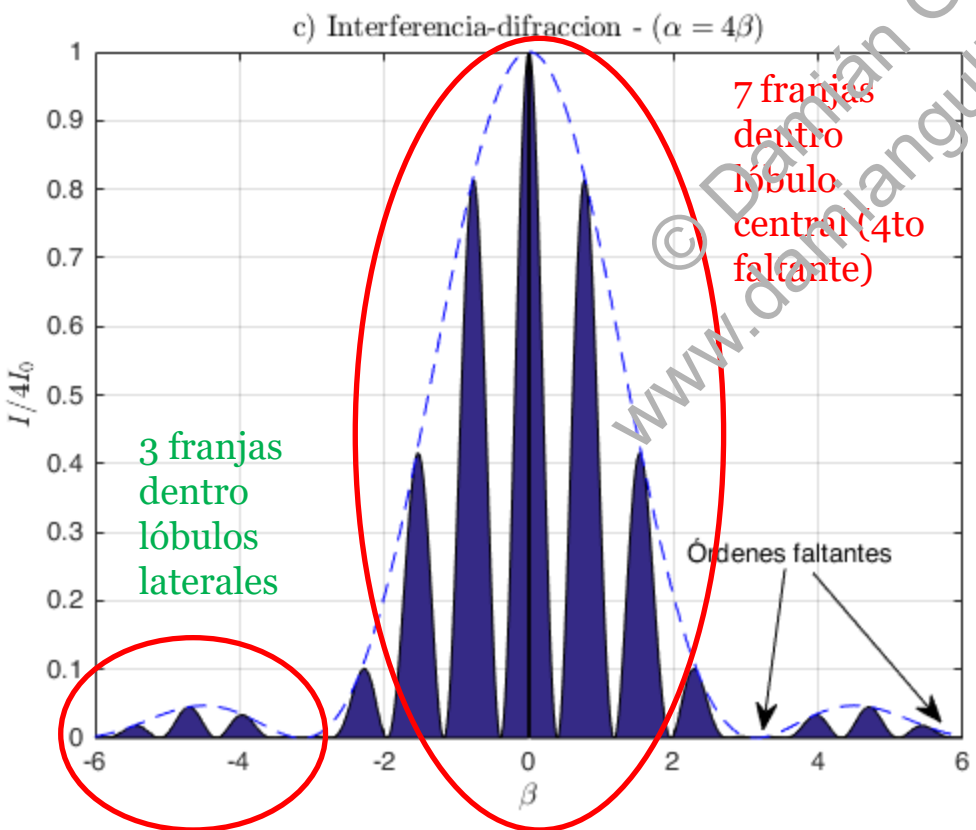
Cantidad de franjas brillantes de interferencia dentro del lóbulo lateral de la envolvente de difracción

Dada a=4b hay otros órdenes perdidos cuando: $m/k = 4$

k=1 m=4

k=2 m=8

k=3 m=12



Tenemos en el primer lóbulo lateral $m = 5{,}6$ y 7.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

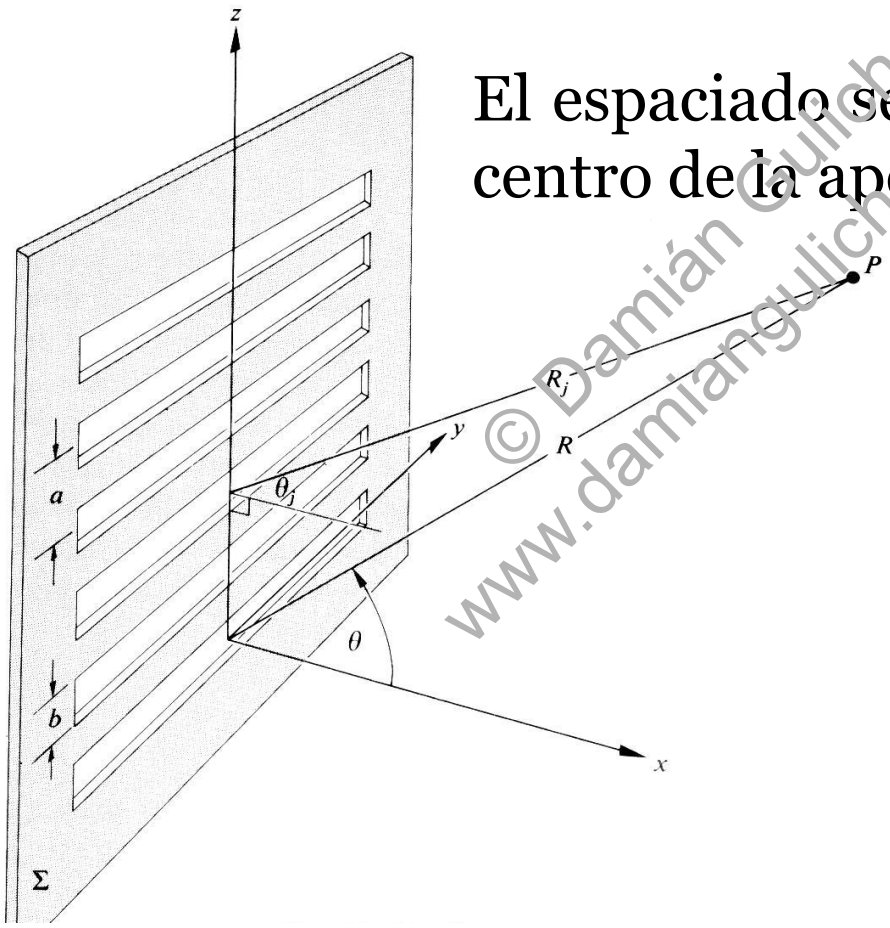
Difracción e interferencia de muchas rendijas rectangulares

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Difracción de Fraunhofer para N ranuras rectangulares

Consideramos el caso de N aperturas iguales:
ancho $\underline{b}$ y espaciado $\underline{a}$.

El espaciado se mide de centro a centro de la apertura.



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Difracción de Fraunhofer para N aberturas rectangulares

Realizaremos el mismo análisis que para una única apertura. El campo es la superposición de N fasores desfasados.

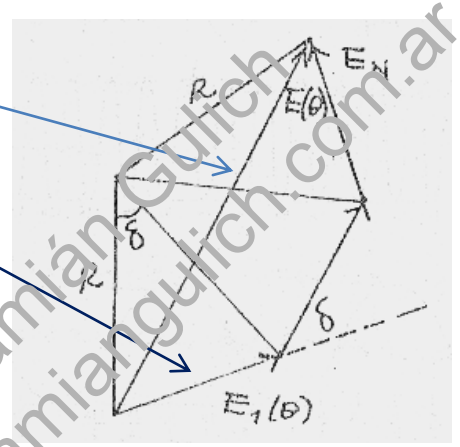
$$\delta_{1,2} = (2\pi a/\lambda)\mathrm{sen}(\theta) = 2\alpha$$

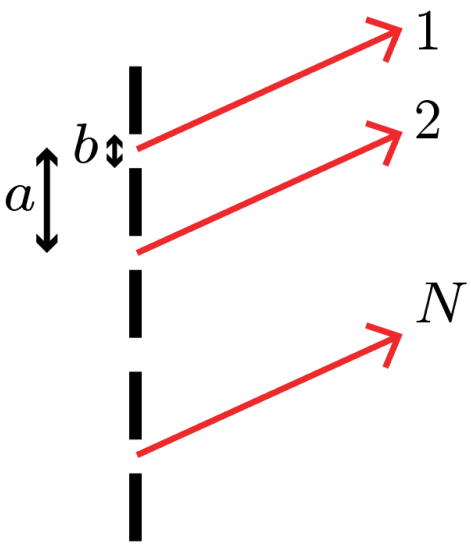
$$E(\theta) = 2R\,\mathrm{sen}(N\delta/2)$$

$$E_1(\theta) = 2R\,\mathrm{sen}(\delta/2)$$

Entonces:

$$E(\theta) = E_1(\theta)\frac{\mathrm{sen}(N\delta/2)}{\mathrm{sen}(\delta/2)}$$





© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

La intensidad resultante en la pantalla será:

$$I(\theta) = I_0 \underbrace{\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}}_{\text{Difracción de 1 ranura}} \underbrace{\frac{\mathrm{sen}^2(N\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)}}_{\text{Interferencia de N ranuras}}$$

I_0 : intensidad difractada por *una* ranura en θ=0.

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)\mathrm{sen}(\theta) \qquad \alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\mathrm{sen}(\theta)$$

Análisis del término de interferencia para N ranuras rectangulares

El término de interferencia es $\dfrac{\operatorname{sen}^2(N\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}$

Si consideramos $\alpha_{MP} = 0, \pm\pi, \ldots, \pm m\pi$, entonces:

$$\lim_{\alpha \to \alpha_{MP}} \frac{\operatorname{sen}^2(N\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} = N^2 \qquad \text{es decir,} \quad \left| \frac{\operatorname{sen}^2(N\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} \right| \leq N^2$$

Corresponde a valores de α que anulan simultáneamente numerador y denominador

Los valores α_{MP} se llaman
máximos principales de orden m

Dado que $\alpha = \left(\dfrac{\pi a}{\lambda}\right) \operatorname{sen}(\theta) = m\pi \quad m = 0, 1, 2, \ldots$

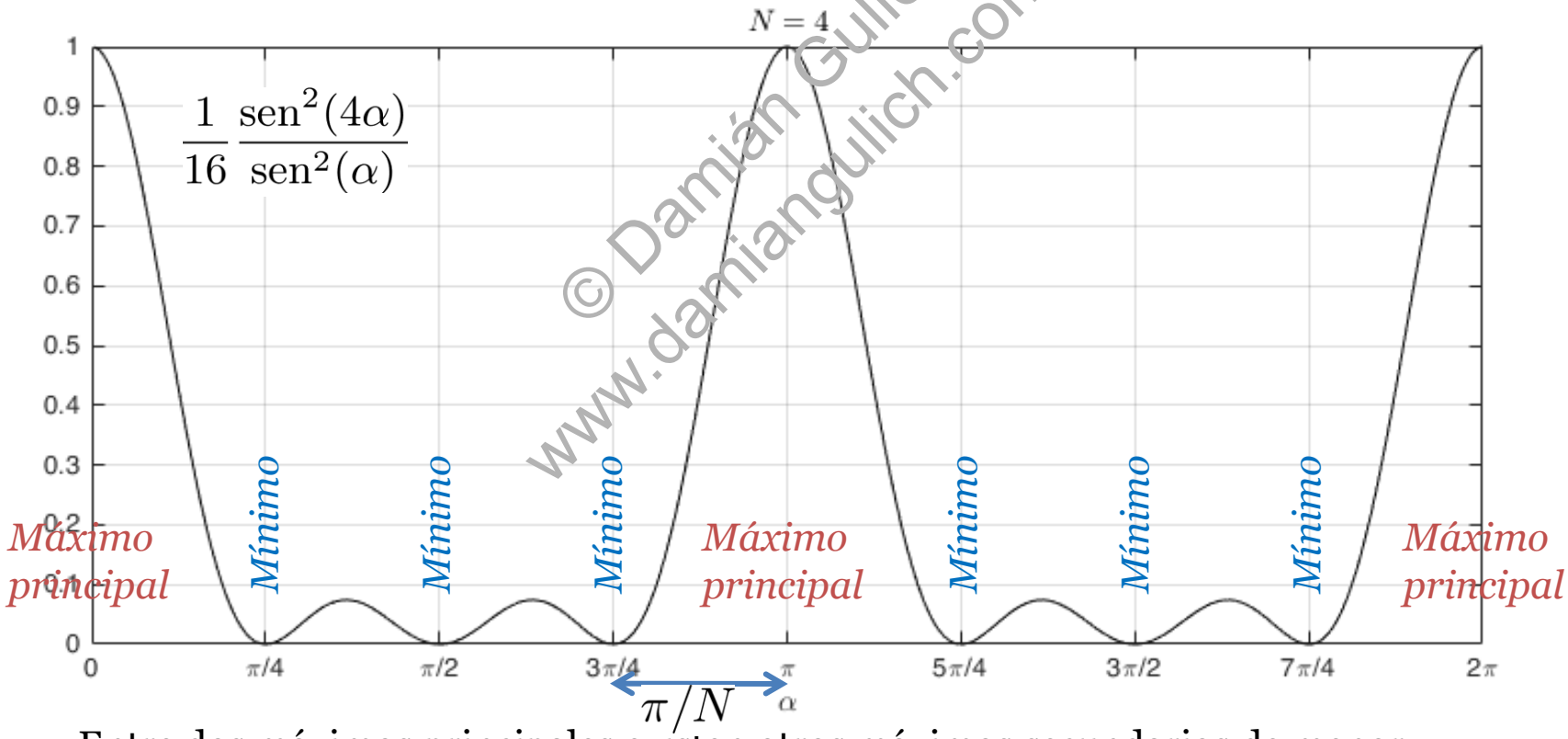
$$\Longrightarrow a \operatorname{sen}(\theta) = m\lambda$$

condición de máximo principal de interferencia

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Análisis del término de interferencia para N ranuras rectangulares

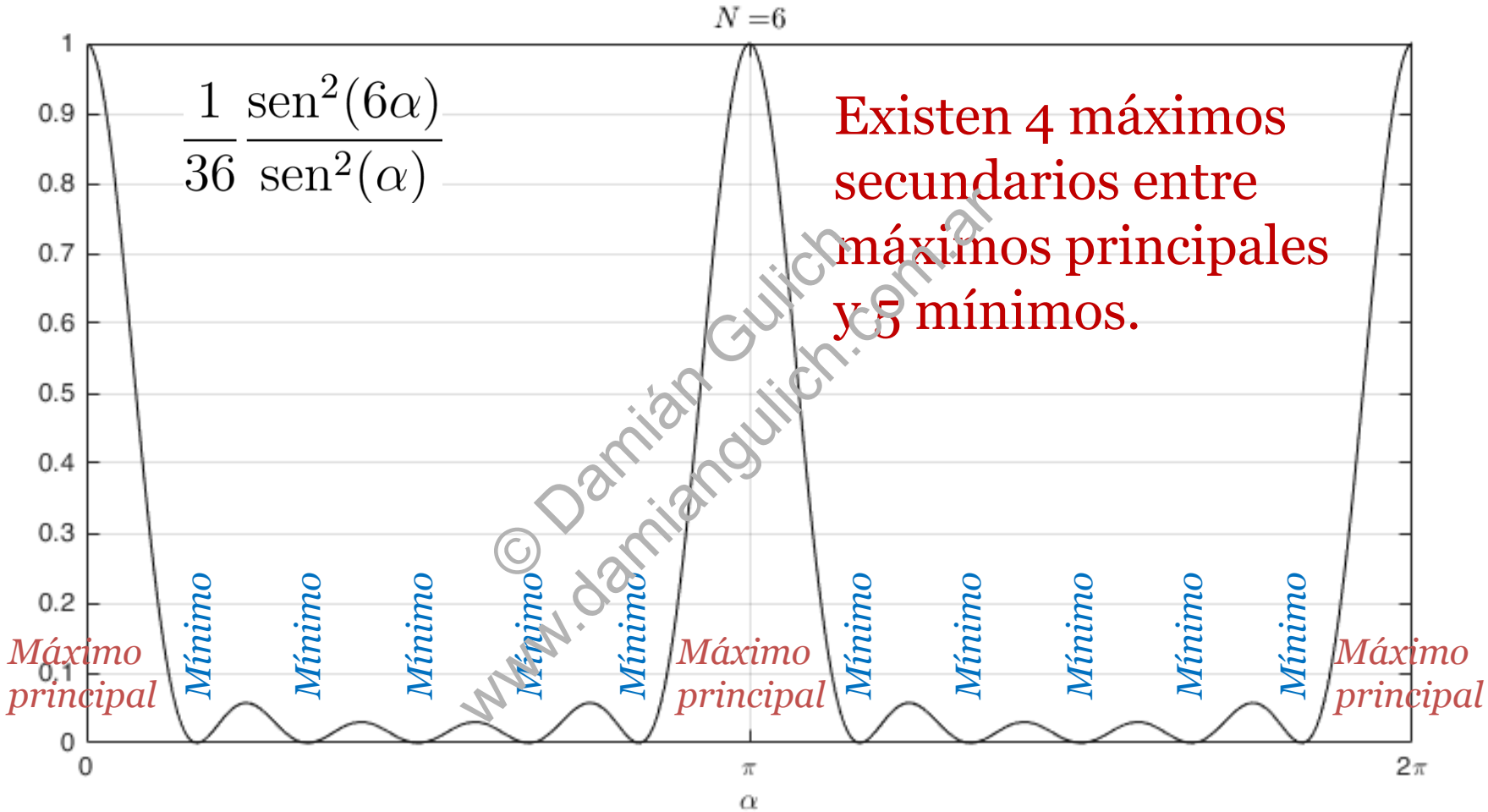
En el término de interferencia $\text{sen}^2(N\alpha)/\text{sen}^2(\alpha)$ el numerador se hace cero para $N\alpha = 0, \pi, 2\pi, \ldots, p\pi$ (más frecuentemente que el denominador).
El denominador se hace cero *y al mismo tiempo* cuando $p = 0, N, 2N, \ldots$
Para esos valores de α tenemos un límite tipo $0/0$ que en este caso es 1.
Ejemplo: Si $N = 4$ hay 2 máximos secundarios entre máximos principales.



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Entre dos máximos principales existen otros máximos secundarios de menor intensidad separados por mínimos.

Término de interferencia para N=6 ranuras rectangulares

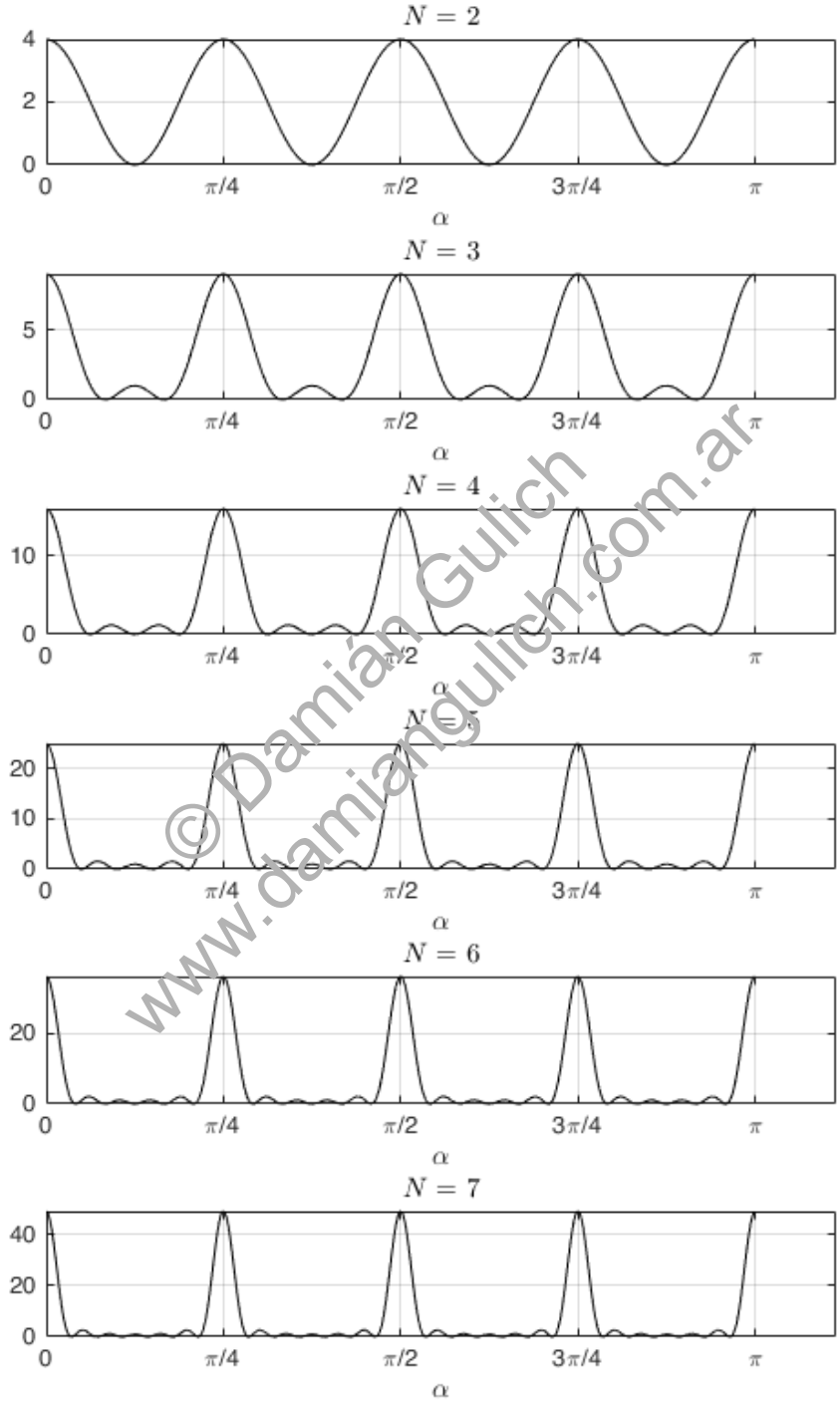


© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

En general, hay

- $N-2$ máximos secundarios entre máximos principales.
- $N-1$ mínimos entre máximos principales.

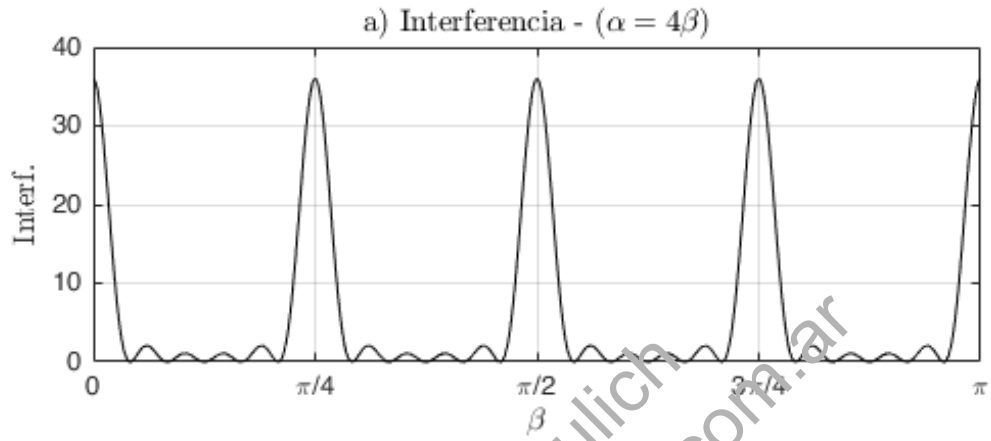
$$\left|\frac{\operatorname{sen}^2(N\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}\right| \leq N^2$$



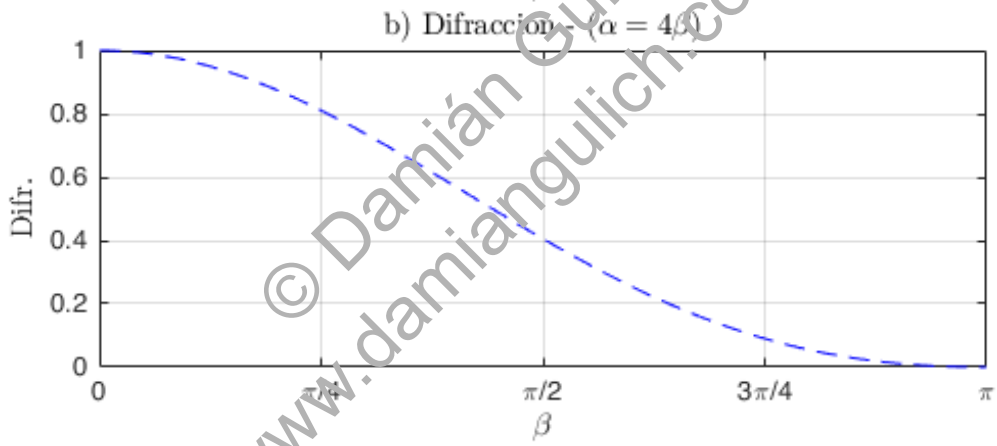
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Teniendo en cuenta la difracción, N=6 ranuras rectangulares (a=4b)

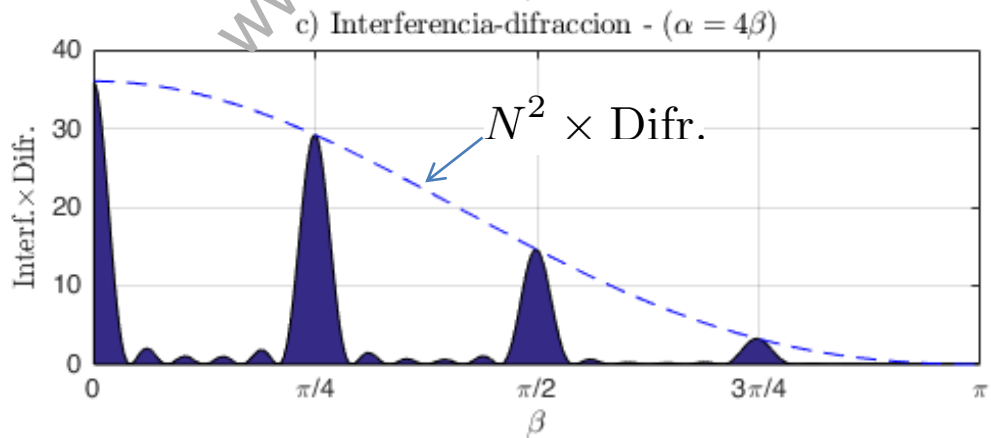
$$\frac{\mathrm{sen}^2(6\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)}$$



$$\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}$$



$$\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}\,\frac{\mathrm{sen}^2(6\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)}$$



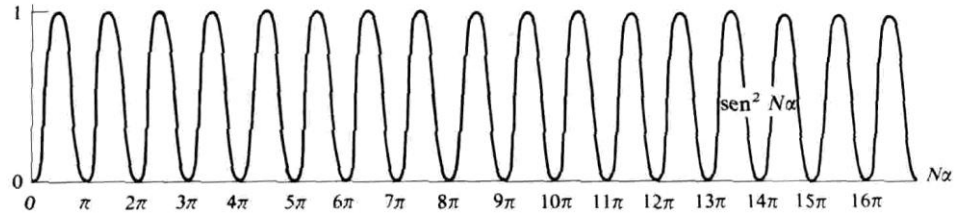
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

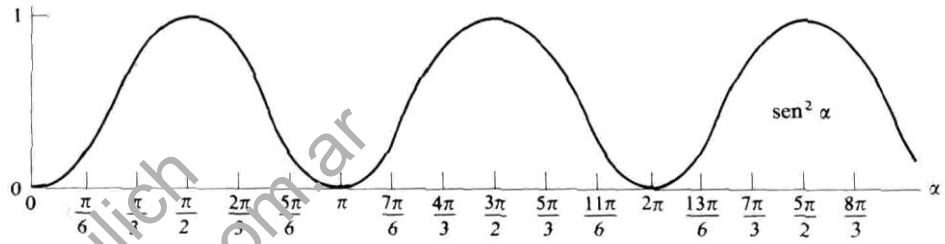
En resumen:

Si conocemos $I(0)$ (intensidad total en el punto central [θ=0] de las N ranuras), la expresión anterior queda:

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2}\,\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2}\,\frac{\mathrm{sen}^2(N\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)}$$

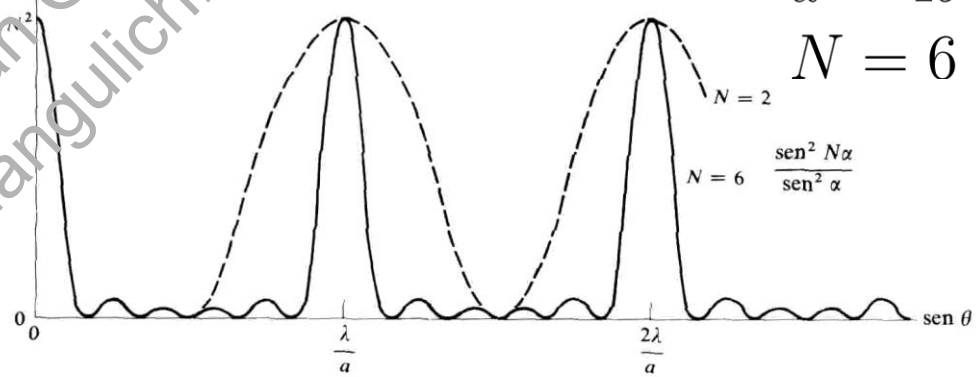
$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)\mathrm{sen}(\theta) \qquad \alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\mathrm{sen}(\theta)$$



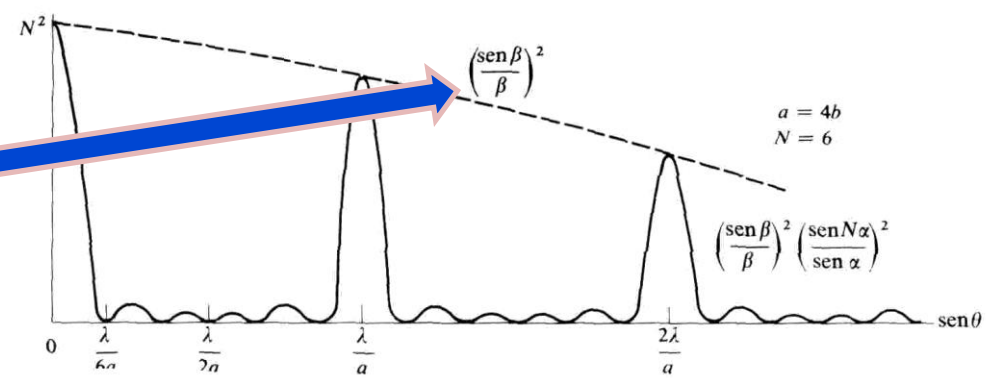


$a = 4b$

$N = 6$

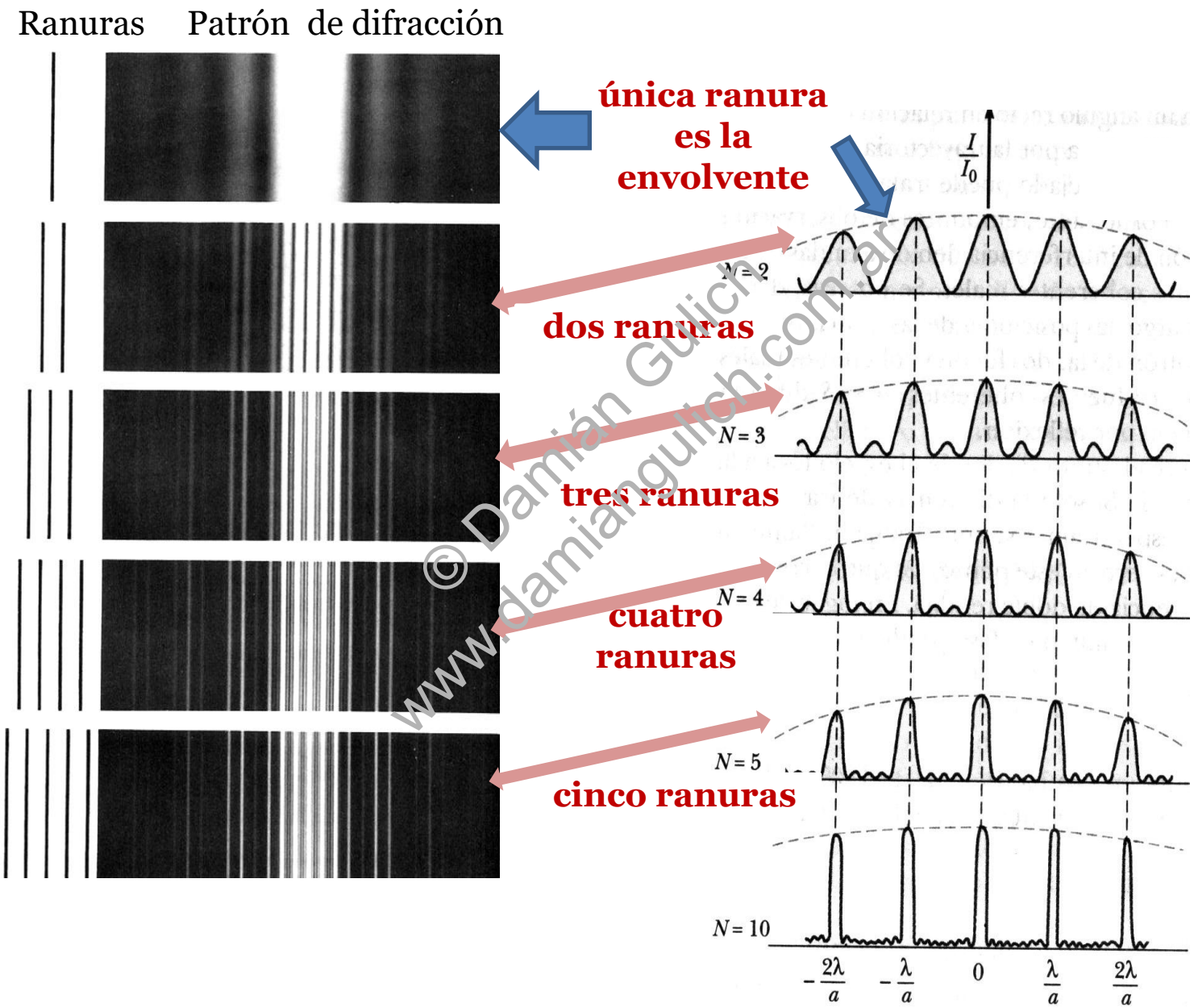


El término de difracción modula al término de interferencia



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Difracción por ranuras múltiples



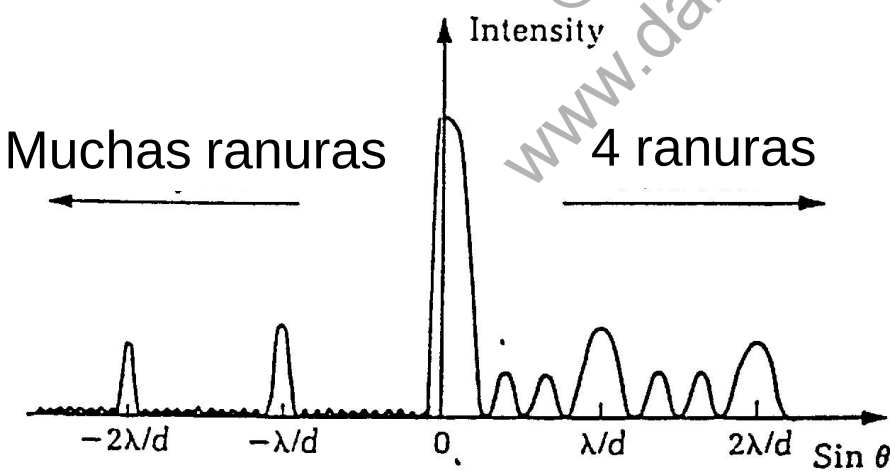
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

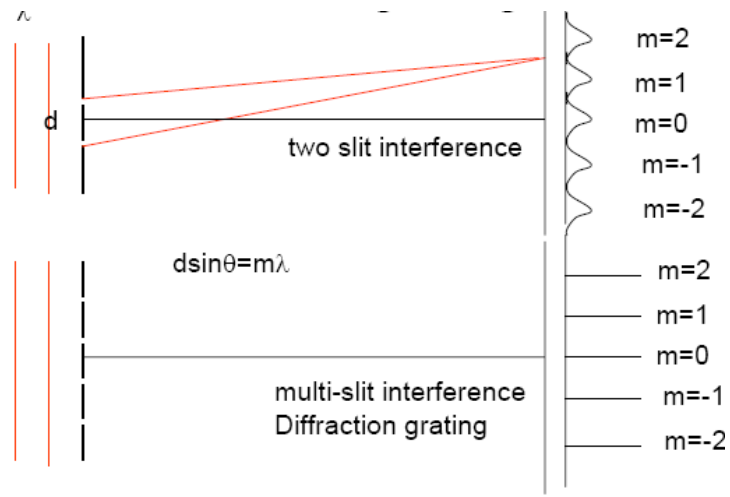
El efecto de muchas ranuras

Los picos de la intensidad (máximos principales de interferencia) se van haciendo cada vez más estrechos a medida que aumenta el número de ranuras. Cuando N es grande, los máximos secundarios tienen una intensidad despreciable y sólo son significativos los máximos principales. Es decir, éstos son bandas estrechas alrededor de los ángulos θ tales que $a\,\mathrm{sen}(\theta) = m\lambda$.

$$\boxed{\mathrm{sen}(\theta) = m\frac{\lambda}{a}}$$

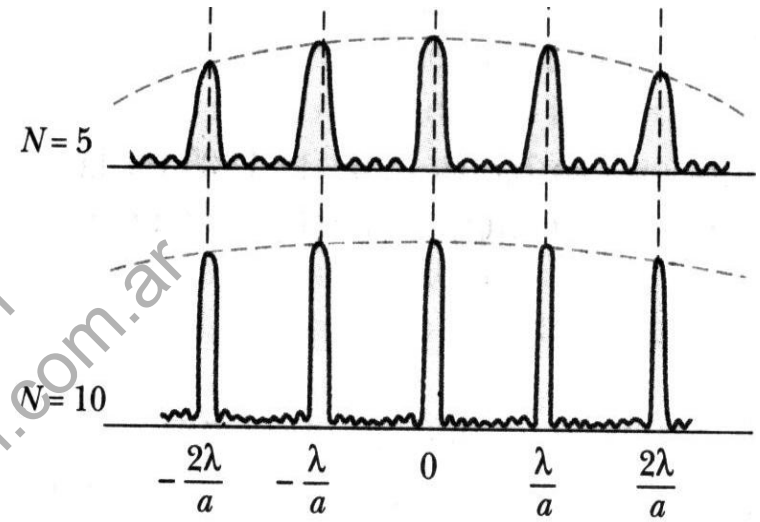
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar





Red de difracción

Cuando N (que es el número de ranuras) tiende a ∞, los máximos secundarios desaparecen y sólo quedan los principales:



$$a\,\mathrm{sen}(\theta) = m\lambda$$

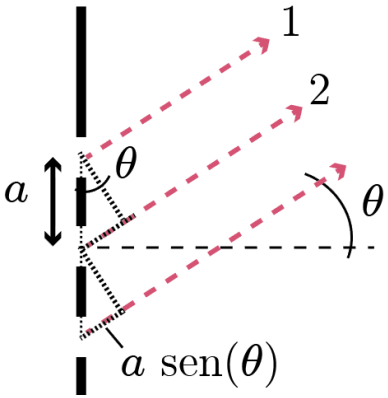
Ecuación fundamental de la red de difracción

donde a es la distancia entre las ranuras de la red.
Si N es el número de ranuras por unidad de longitud, entonces, $a = 1/N$.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

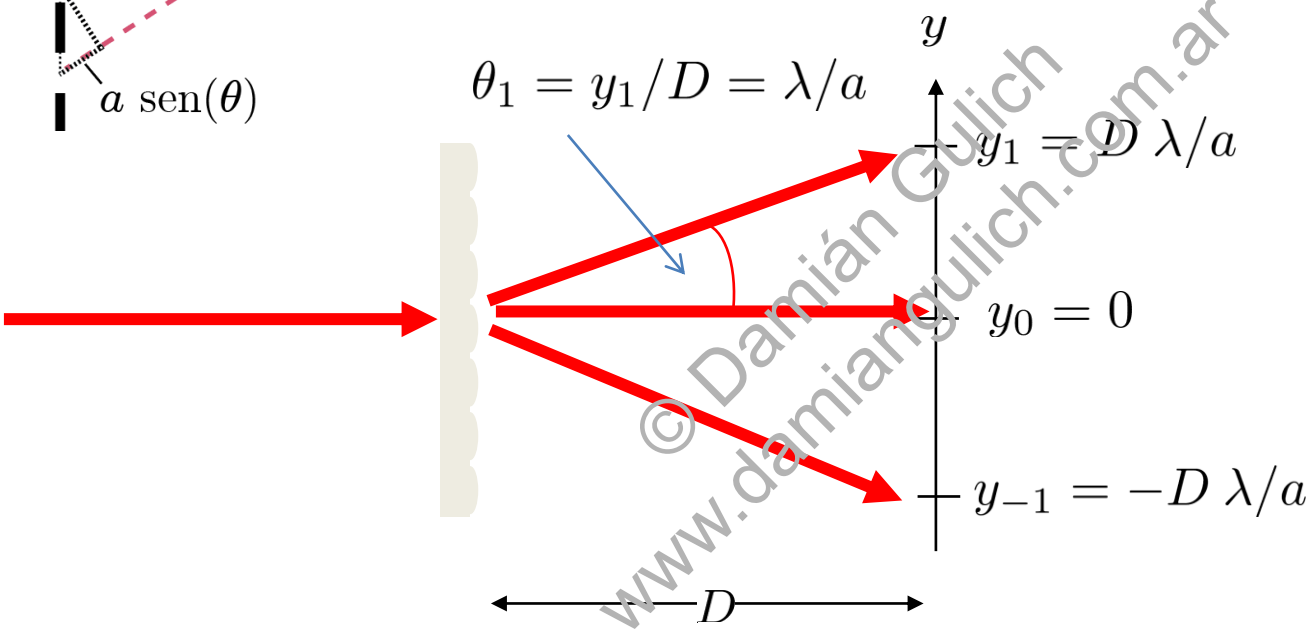
Cuando el número de ranuras iluminadas es muy grande (sólo se observan los máximos principales de interferencia dentro del lóbulo central de difracción.
Los máximos principales en este caso se denominan *órdenes*.

Difracción por una red



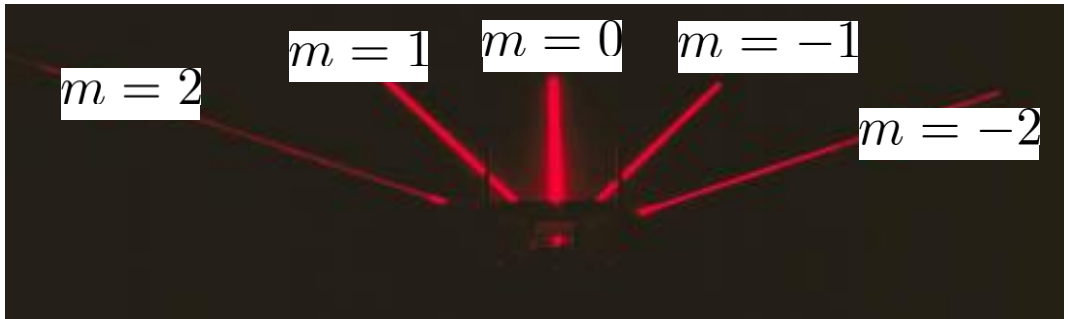
$$\operatorname{sen}(\theta) = m\frac{\lambda}{a} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Si θ es pequeño (menos que 1 rad), $\operatorname{sen}(\theta) \approx y_m/D$



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

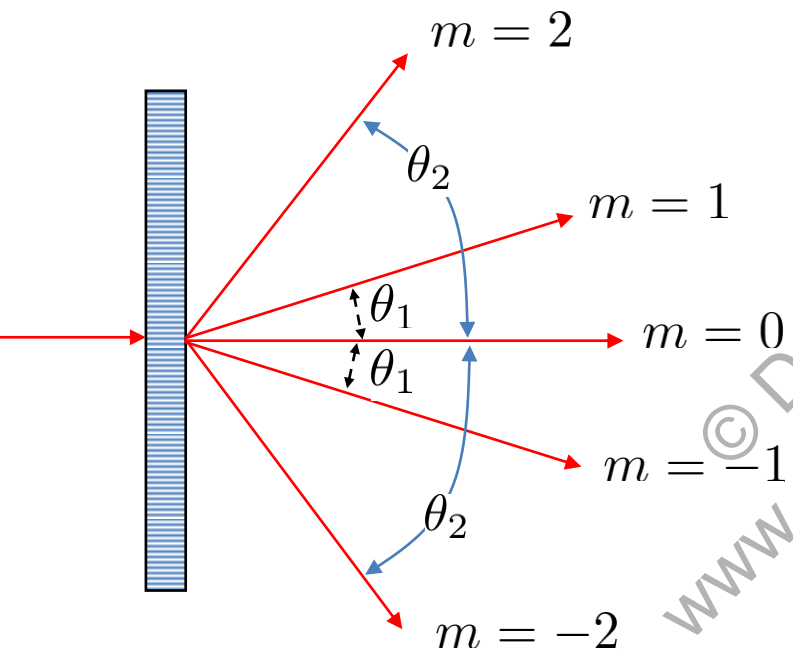
Máximos principales de interferencia: órdenes de difracción



Número de órdenes difractados

Calcularemos el mayor orden de m posible.

Dado que $\text{sen}(\theta) \leq 1$: $\Longrightarrow \text{sen}(\theta) = m\dfrac{\lambda}{a} \leq 1$



$$\Longrightarrow \boxed{m \leq \frac{a}{\lambda}}$$

El máximo orden posible M es

$$M = \left\lfloor \frac{a}{\lambda} \right\rfloor$$

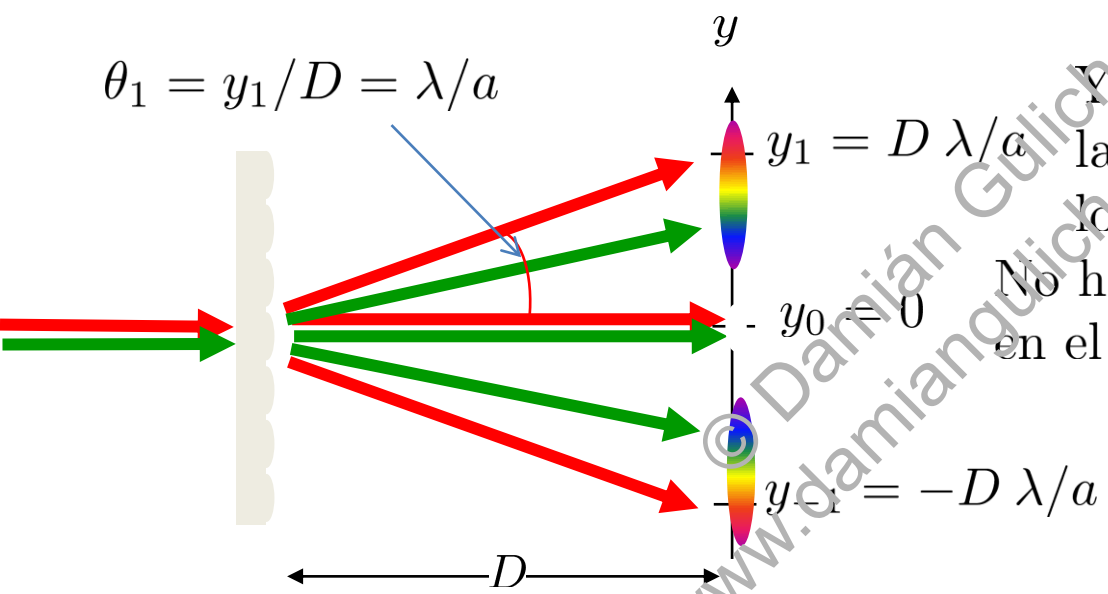
donde $\lfloor a/\lambda \rfloor$ es a/λ redondeada al entero inmediato inferior (valor entero de a/λ).

Ejemplo: $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Órdenes de difracción para la luz policromática

Dado que la posición angular de los órdenes de difracción depende de la longitud de onda λ, no coinciden sobre la pantalla los mismos órdenes distintos de cero para las diferentes longitudes de onda.



Ya que y_1 depende de λ, se separan las diferentes longitudes de onda en los órdenes $m = \pm 1$.

No hay dependencia de λ en el orden $m = 0$.

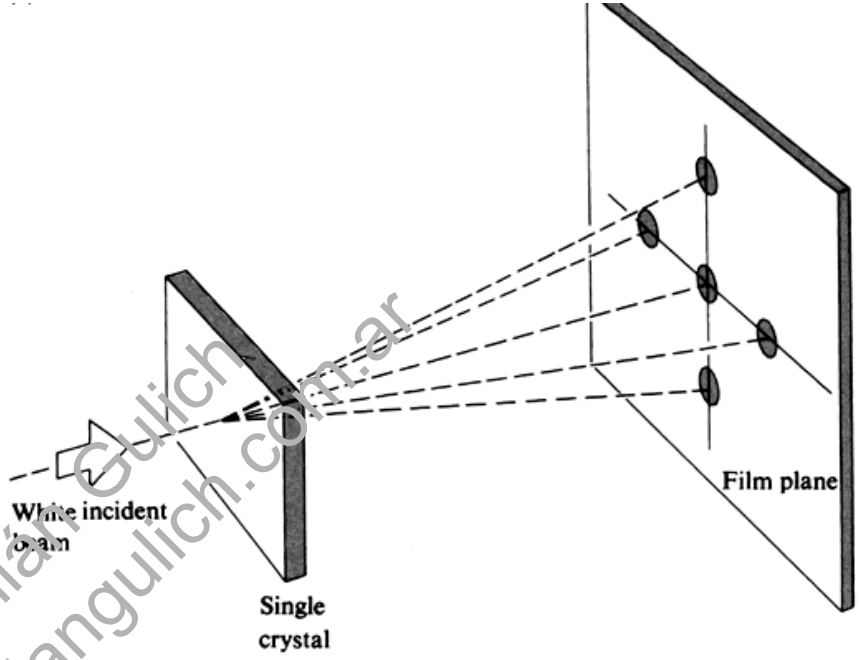
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Cuanto mayor es la longitud de onda, mayor es la separación de las distintas longitudes de onda (colores) en los órdenes no nulos.

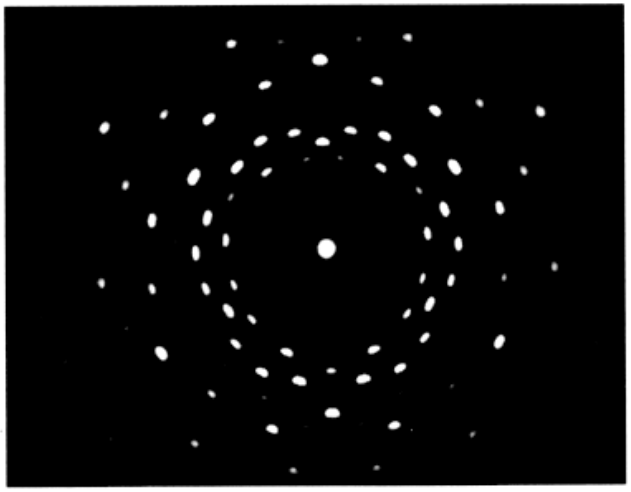
Las redes de difracción difractan diferentes longitudes de onda en diferentes direcciones, lo que permite medir los *espectros*.

Cristalografía de rayos X

La difracción permite ampliar la estructura más pequeña en un patrón más grande, es decir permite calcular magnitudes macroscópicas a partir de la medida de magnitudes microscópicas. La técnica de cristalografía de rayos X, revela la estructura molecular.

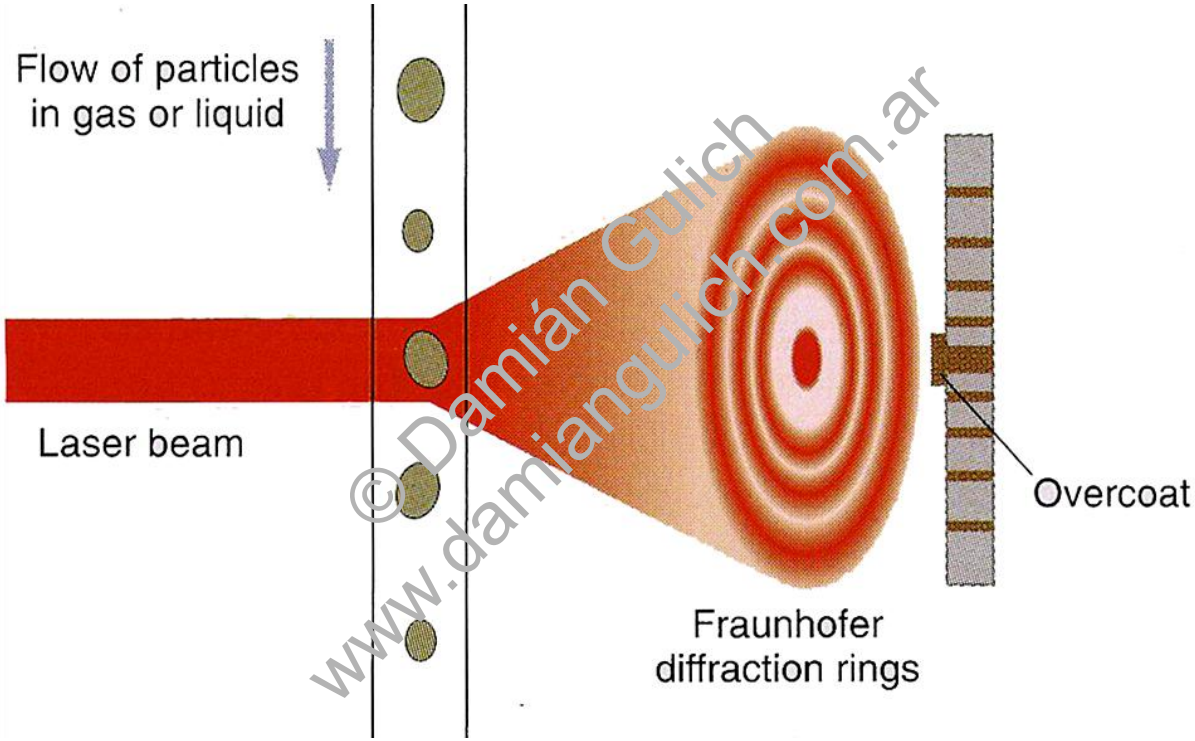


(b)



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

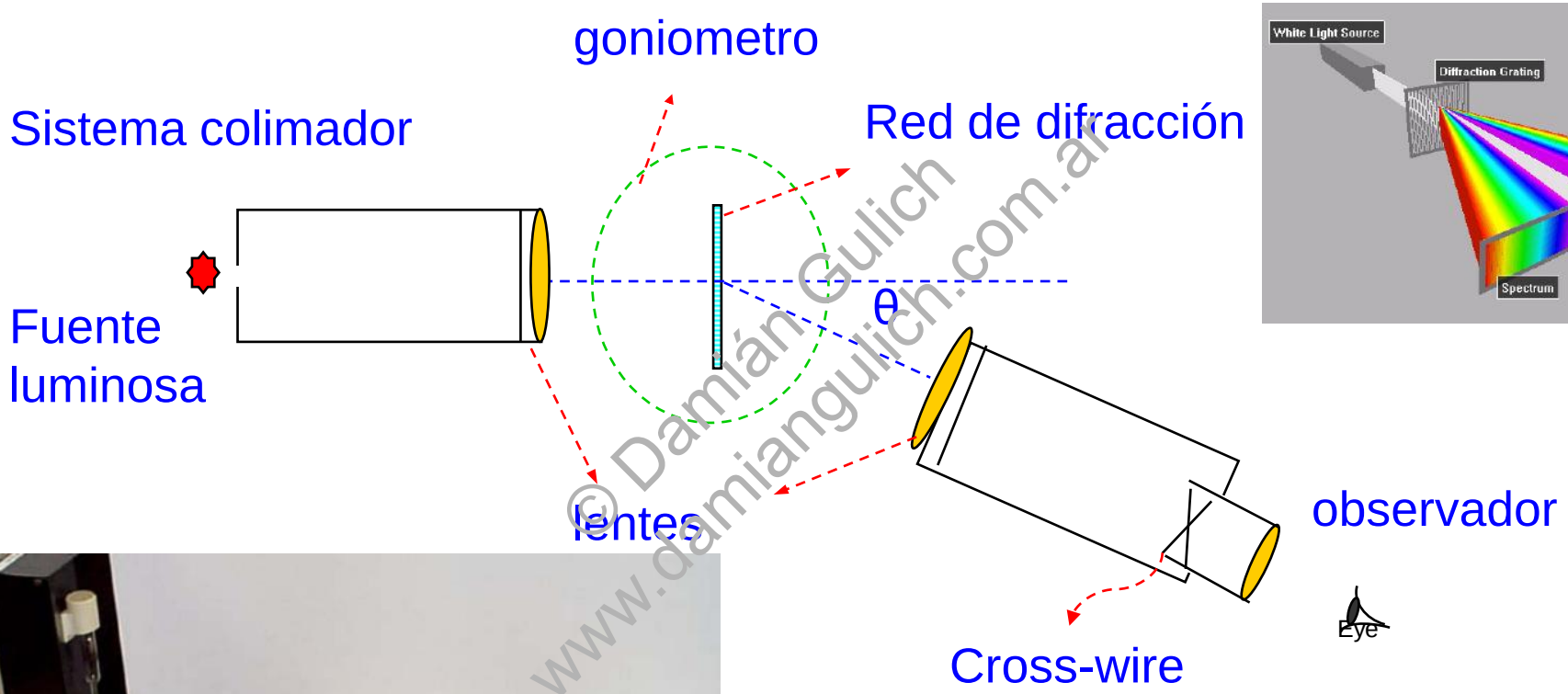
La figura de difracción permite medir el diámetro de obstáculos o partículas

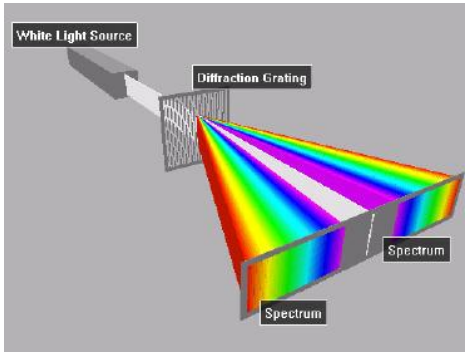


© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Muchos sistemas de medidas de partículas se basan en la difracción de Fraunhoffer por un haz láser.

Aplicación: uso de una red de difracción para medir longitudes de onda que emite una fuente de luz





© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Criterio de Rayleigh y poder resolvente (red de difracción)

Dos figuras de difracción están *resueltas* cuando el máximo de una coincide con el mínimo de la otra:

Máximo principal de orden m para λ vista en el ángulo θ:

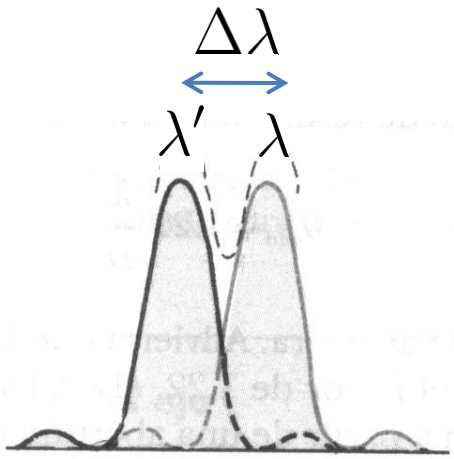
$$\alpha_{MP}(\lambda) = (\pi a/\lambda)\text{sen}(\theta) = m\pi \Longrightarrow \lambda = a\,\text{sen}(\theta)/m$$

Mínimo contiguo de orden m para λ' vista en el ángulo θ:

$$\alpha_{\text{mín}} = (\pi a/\lambda')\text{sen}(\theta) = m\pi + \pi/N \Longrightarrow \lambda' = a\,\text{sen}(\theta)/(m + 1/N)$$

Despejando:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = 1 + \frac{1}{Nm} = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda - \Delta\lambda}}_{(\lambda = \lambda' + \Delta\lambda)} \simeq 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$



$$\boxed{\Delta\lambda_{\text{mín}} = \frac{\lambda}{Nm}}$$

La mínima diferencia de longitudes de onda que es posible resolver con la red.

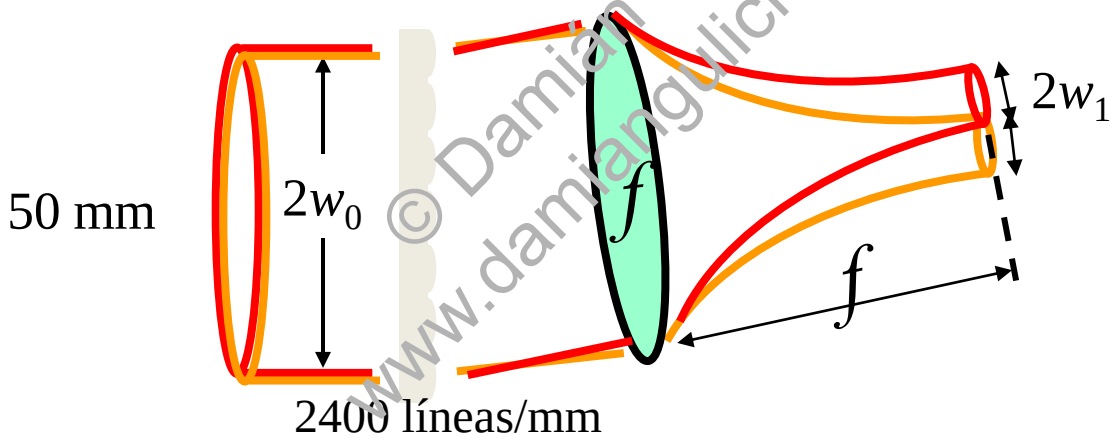
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Resolución de una red de difracción

$$\text{Resolución} = \frac{\Delta\lambda_{\text{mín}}}{\lambda} = \frac{1}{Nm}$$

La resolución depende de la longitud de onda, orden de difracción y de cuántas líneas/mm son iluminadas.

Ejemplo: Resolución de un espectrómetro que emplea una red de difracción



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

$\lambda \approx 600$ nm $\qquad m = 1$

N = (50 mm) x (2400 líneas/mm) = 120000 líneas

$$\Longrightarrow \Delta\lambda \simeq 0{,}005 \text{ nm}$$

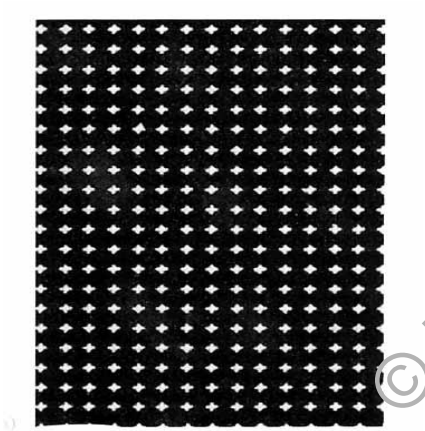
$$\text{Resolución} \simeq 8{,}33 \cdot 10^{-6}$$

Obstáculos complementarios

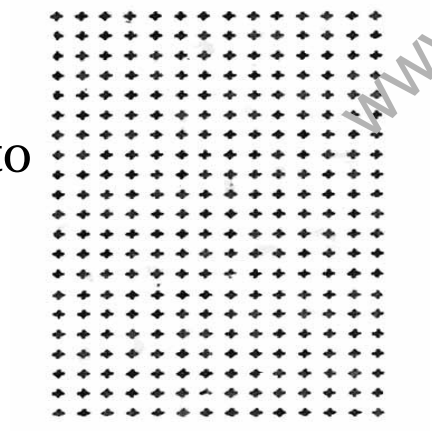
Definición: Dos obstáculos son complementarios si las regiones transparentes de una se corresponden con las partes opacas de la otra.

Obstáculo

Agujeros



Complemento



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

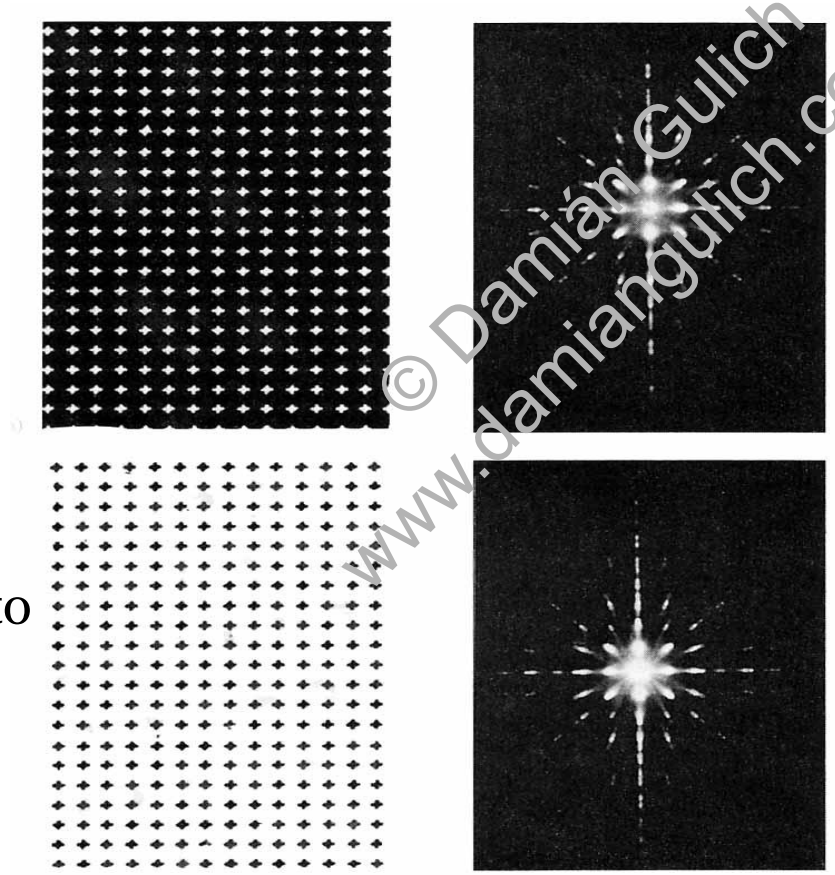
Principio de Babinet

Principio de Babinet: "Las figuras de difracción de Fraunhofer de dos obstáculos complementarios resultan equivalentes."

Obstáculo Patrón de difracción

Agujeros

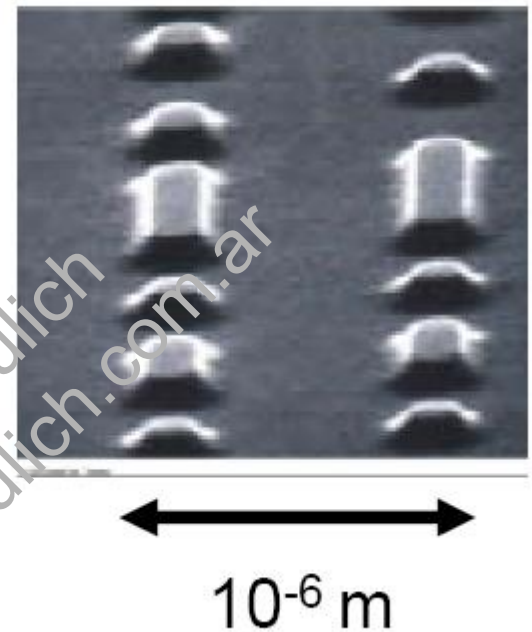
Complemento



© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Entonces, la figura de difracción de un alambre o de un cabello se puede asimilar a la de una ranura del mismo ancho.

CD/DVD como red de difracción

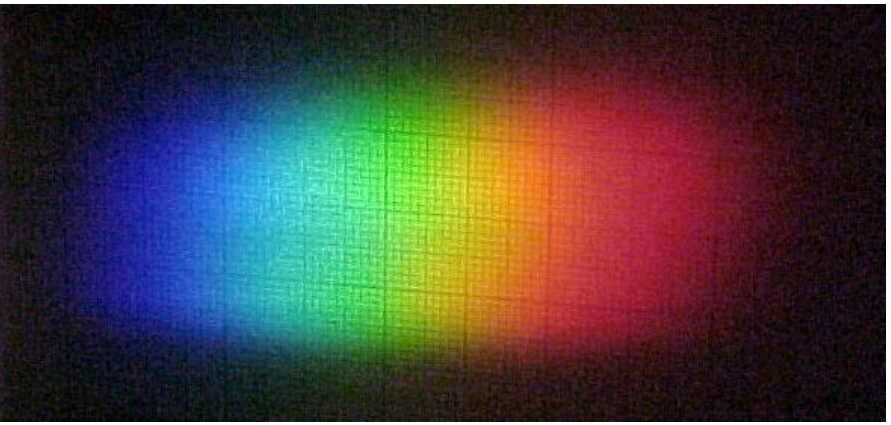


© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Los puntos en un CD actúan como una red de difracción
La cantidad de información que puede ser almacenada esta limitada por el diámetro del spot de difracción

- CD : 625 líneas/mm.
- 3,95GB DVD-R: 1250 líneas/mm.
- 4,7GB DVD-R 1351 líneas/mm.

Espectros de fuentes lumínicas



Difracción de luz blanca

Difracción de llama de metano.

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Luces de alumbrado público (sodio)

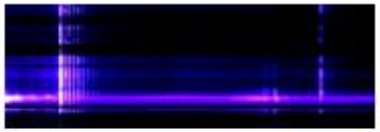
Lámpara de bajo consumo (mercurio).

https://publiclab.org/wiki/papercraft-spectrometer

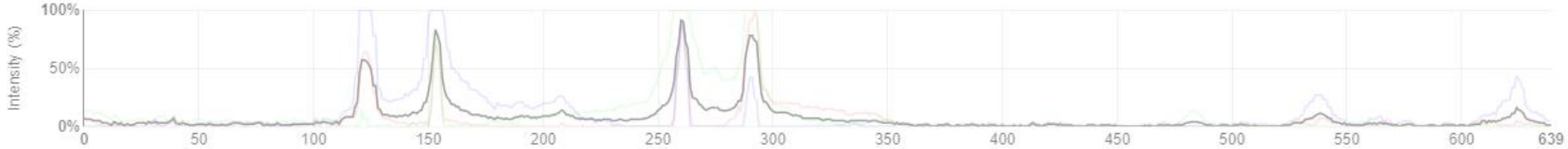
Sky

LED

Sodium



Laser



mercury Lamp Calibration

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Preguntas

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar