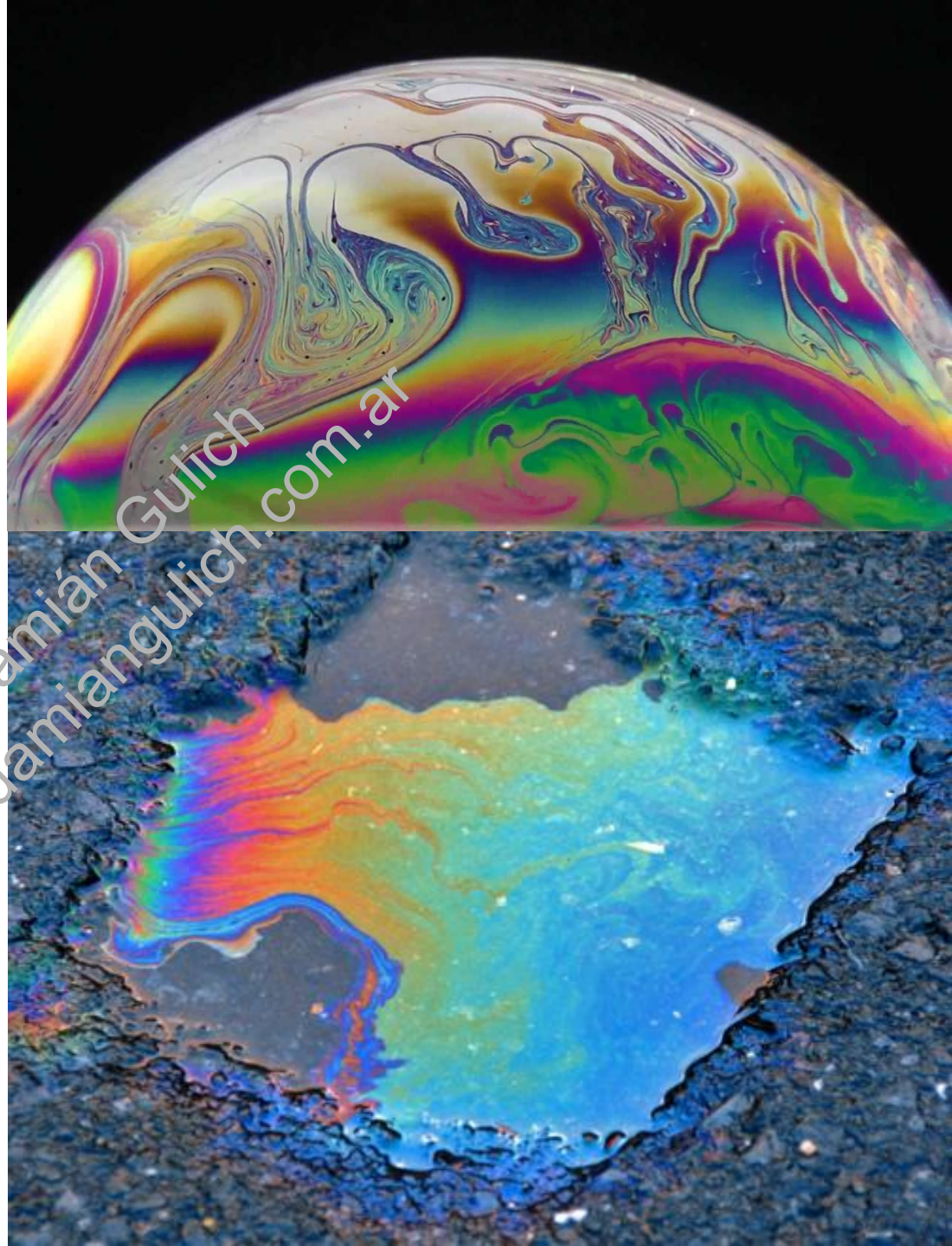


02.07. INTERFERENCIA

Damián Gulich
2020 (V2)

Los patrones de color
que resplandecen sobre
las pompas de jabón o
sobre el aceite
derramado sobre el
agua en la calle son
manifestaciones del
fenómeno de
interferencia.



La ecuación de onda y el principio de superposición

La suma de dos ondas electromagnéticas es también una onda. Recordemos que los campos eléctricos (y magnéticos) satisfacen la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda para el campo eléctrico en cierto medio

Supongamos que $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ y $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ satisfacen cada una la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E}_1 = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{E}_2 = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial t^2}$$

Ahora sumemos esas dos ecuaciones de onda [usamos que $\partial_u^n f + \partial_u^n g = \partial_u^n (f + g)$]:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \vec{E}_1 = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} \\ + \\ & \nabla^2 \vec{E}_2 = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

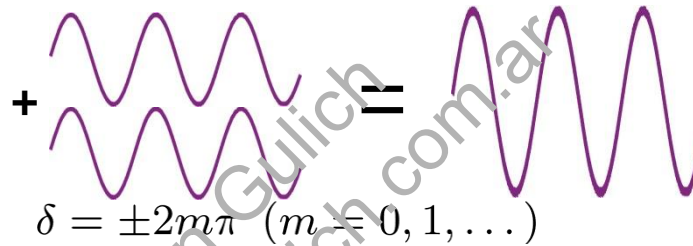
- El campo eléctrico resultante en un punto en el espacio donde dos o más ondas luminosas se superponen es igual a la suma vectorial de las ondas individuales.
- La interferencia óptica es una interacción de dos o más ondas de luz que producen una intensidad resultante, la cual se desvía de la simple suma de las intensidades individuales.

¡La suma $\vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t)$ satisface la ecuación de onda!

Suma de ondas: Interferencia

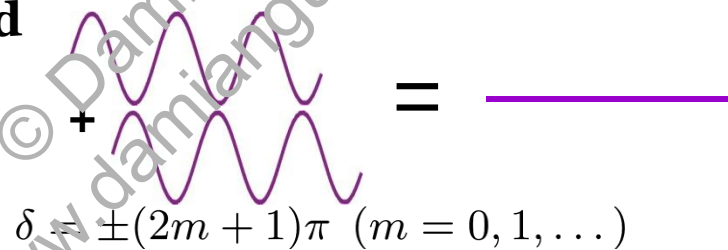
Consideramos el efecto que produce la superposición de ondas que se propagan en el mismo sentido. **En general, éstas pueden tener distinto origen y distinta fase inicial.**

Ondas que se combinan **en fase** dan una máxima visibilidad.



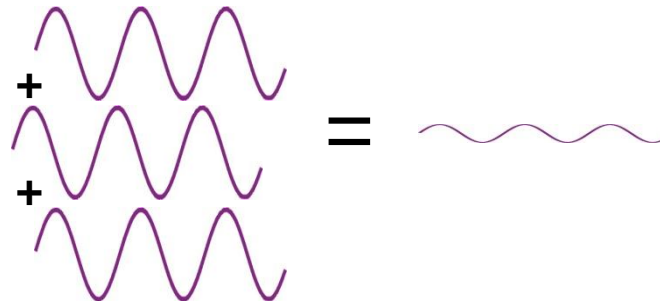
Interferencia constructiva
(*coherente*)

Ondas que se combinan π **rad** (**180°**) **fuera de fase** (**contrafase**) se cancelan y dan una visibilidad nula.



Interferencia destructiva
(*coherente*)

Ondas que se combinan con **diferentes fases** en su mayor parte se cancelan y la resultante presenta una baja visibilidad.



Suma incoherente

Ondas monocromáticas

Una *fente monocromática* es aquella que emite luz con una única frecuencia (o longitud de onda).

Recordemos que una onda lumínica plana monocromática linealmente polarizada en el eje y que se propaga en un medio transparente en el sentido de $+x$ con velocidad v tiene un campo eléctrico que se puede expresar así:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j} \quad \text{donde} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = \frac{\omega}{k}$$

También podríamos usar coseno, como en la clase anterior

Ahora de una manera más general:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$$

- $\vec{E}_0$ es un vector **constante**. $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$.
Su módulo $\|\vec{E}_0\| = E_0$ es la amplitud de la onda (su valor máximo).
- $\vec{k}$ es el vector de propagación ($\|\vec{k}\| = 2\pi/\lambda$).
- El plano de polarización es el plano determinado por $\vec{E}_0$ y $\vec{k}$.
- $\vec{r}$ es el punto de observación y ϕ es una fase **constante**.

Diferencia de fase entre dos ondas

Dadas dos ondas, definimos la diferencia de fase δ como la diferencia entre las fases (argumentos) de sus funciones armónicas:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} \sin(\text{Fase}_1) \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} \sin(\text{Fase}_2) \end{aligned} \right\} \delta = \text{Fase}_2 - \text{Fase}_1$$

Ejemplos:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1(x, t) &= E_{01} \sin(kx - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2(x, t) &= E_{02} \sin(kx - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \delta = \phi_2 - \phi_1$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1(x, t) &= \vec{E}_{01} \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2(x, t) &= \vec{E}_{02} \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \delta = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1$$

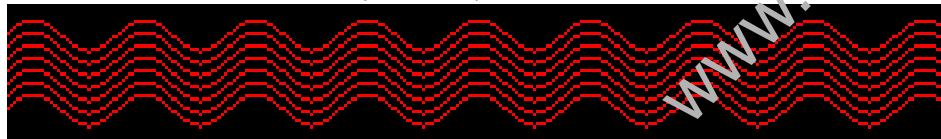
Coherencia

Dos fuentes monocromáticas se dicen *coherentes* cuando emiten luz con la misma frecuencia ω y tienen una diferencia de fase definida y constante ($\delta = \text{cte}$). Por ejemplo:

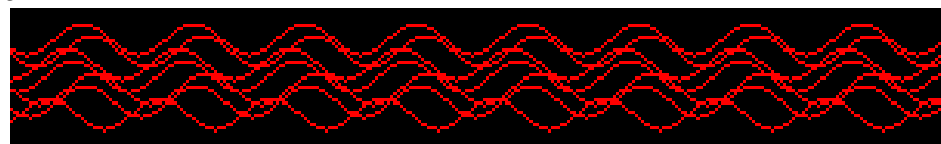
$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1(x, t) &= E_{01} \sin(kx - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2(x, t) &= E_{02} \sin(kx - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Son coherentes entre sí} \\ &(\delta = \phi_2 - \phi_1) = \text{cte} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1(x, t) &= \vec{E}_{01} \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2(x, t) &= \vec{E}_{02} \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Son coherentes entre sí} \\ &(\delta = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1) = \text{cte} \end{aligned}$$

Luz coherente (láser)



Luz incoherente (lámparas de filamento, sol, una vela)



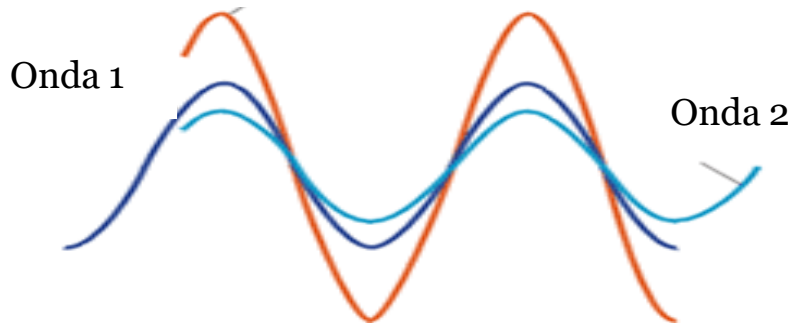
Cuando muchas ondas se combinan con **diferentes fases aleatorias** en su mayor parte se cancelan y la resultante presenta una baja visibilidad.

$$\begin{aligned} &\text{Onda 1} \\ &\text{Onda 2} \\ &\text{Onda 3} \end{aligned} = \text{Suma incoherente}$$

Diagrama que ilustra la cancelación de ondas incoherentes. A la izquierda, tres ondas sinusoidales de color morado están desfasadas entre sí. A la derecha, una sola onda sinusoidal de color morado con una amplitud muy pequeña, representando el resultado de la suma incoherente.

Ondas en fase y contrafase

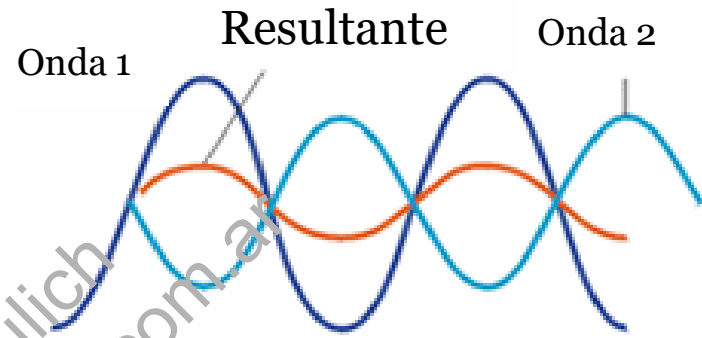
ONDAS EN FASE
Resultante



$$\delta = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

interferencia constructiva

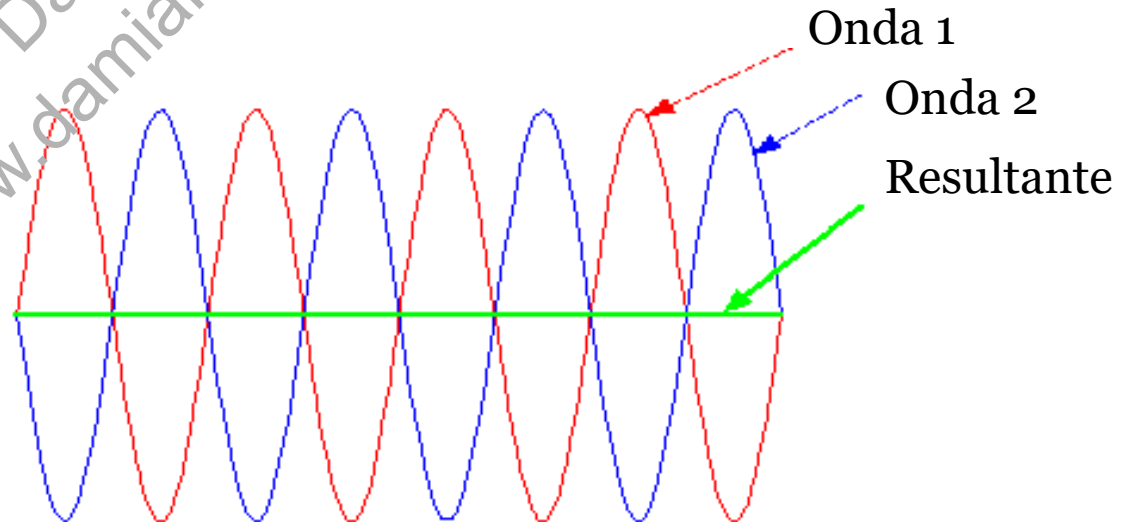
ONDAS EN CONTRAFASE



$$\delta = \pm (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

interferencia destructiva

Dos ondas de igual amplitud y frecuencia y a contrafase una de la otra dan como resultado una cancelación de ambas.



**INTERFERENCIA
DESTRUCTIVA TOTAL**

Interferencia entre dos ondas electromagnéticas

Supongamos una onda plana monocromática observada en el punto P , donde el campo eléctrico está descrito por $\vec{E}(P, t)$. El módulo de su vector de Poynting es:

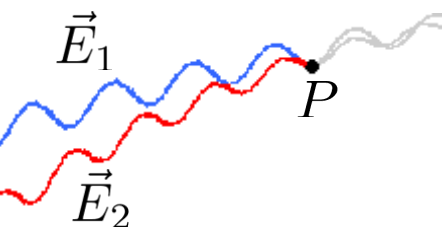
$$\|\vec{S}(P, t)\| = v\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} = v\epsilon \|\vec{E}\|^2 \quad \longrightarrow \quad I(P) = \langle \|\vec{S}\| \rangle = v\epsilon \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = \frac{v\epsilon}{2} E_0^2$$

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt'$$

Irradiancia (intensidad lumínica observada)

Supongamos ahora que el campo eléctrico de esta onda es en realidad interferencia (suma) de otras dos: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. La intensidad vista en P será entonces:

$$\begin{aligned} I(P) &= v\epsilon \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = v\epsilon \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rangle \\ &= v\epsilon \langle \|\vec{E}_1\|^2 \rangle + v\epsilon \langle \|\vec{E}_2\|^2 \rangle + 2v\epsilon \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \\ &= \underbrace{\frac{v\epsilon}{2} E_{01}^2}_{I_1(P)} + \underbrace{\frac{v\epsilon}{2} E_{02}^2}_{I_2(P)} + \underbrace{2v\epsilon \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}(P)} \end{aligned}$$



$$\star \quad I(P) = I_1(P) + I_2(P) + I_{12}(P)$$

término de interferencia

Para fuentes *incoherentes* no existe una relación de fase definida entre E_1 y E_2 y el término de interferencia es cero.

El término de interferencia

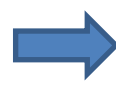
Calcularemos específicamente la forma del término de interferencia I_{12} si el punto P se encuentra determinado por el vector posición $\vec{r}$ y las dos ondas tienen exactamente la misma frecuencia ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \end{array} \right. \quad (\delta = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 &= (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \\ &\stackrel{(*)}{=} (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \left[\sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1) \cos(\omega t) - \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1) \sin(\omega t) \right] \times \dots \\ &\quad \left[\sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2) \cos(\omega t) - \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2) \sin(\omega t) \right] \end{aligned}$$

Después de multiplicar y sacar el promedio temporal, obtenemos:

$$I_{12}(P) = 2v\epsilon \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = v\epsilon \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1)$$


$$I_{12}(P) = v\epsilon \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\delta)$$

$$\begin{aligned} (*) \quad \sin(A \pm B) &= \sin(A) \cos(B) \pm \cos(A) \sin(B) \\ \cos(A \pm B) &= \cos(A) \cos(B) \mp \sin(A) \sin(B) \end{aligned}$$

El término de interferencia: el caso usual

La situación de trabajo más corriente es que ambas ondas tengan la misma polarización: que las amplitudes $\vec{E}_{01}$ y $\vec{E}_{02}$ sean **paralelas**. Es decir: $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = E_{01}E_{02}$. Así:

$$I_{12} = v\epsilon \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\delta) = v\epsilon E_{01}E_{02} \cos(\delta)$$

Por otro lado, podemos notar que:

$$I_1 = \frac{v\epsilon}{2} E_{01}^2 \implies E_{01} = \sqrt{\frac{2I_1}{v\epsilon}} \quad I_2 = \frac{v\epsilon}{2} E_{02}^2 \implies E_{02} = \sqrt{\frac{2I_2}{v\epsilon}}$$

Reemplazando:

$$\implies I_{12}(P) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta)$$

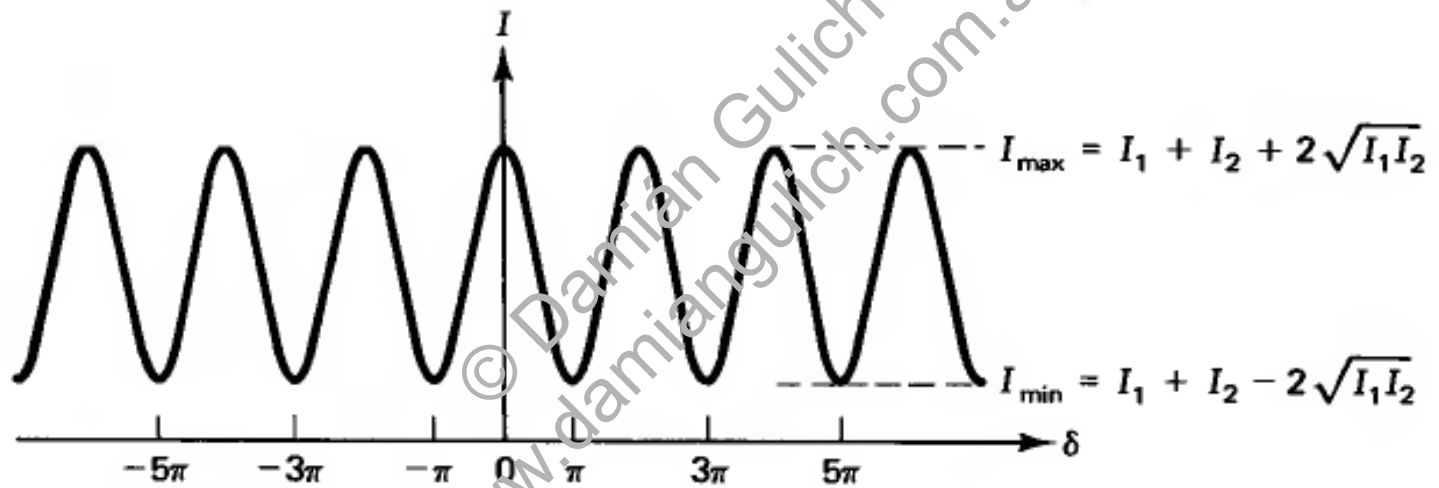
La interferencia total en el punto P es:

$$\star \implies I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta)$$

(I_1 e I_2 están evaluadas en el punto P).

- Donde $\delta = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) hay un **máximo de intensidad**.
- Donde $\delta = \pm(2m + 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) hay un **mínimo de intensidad**.

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta)$$



Interferencia de ondas de igual amplitud

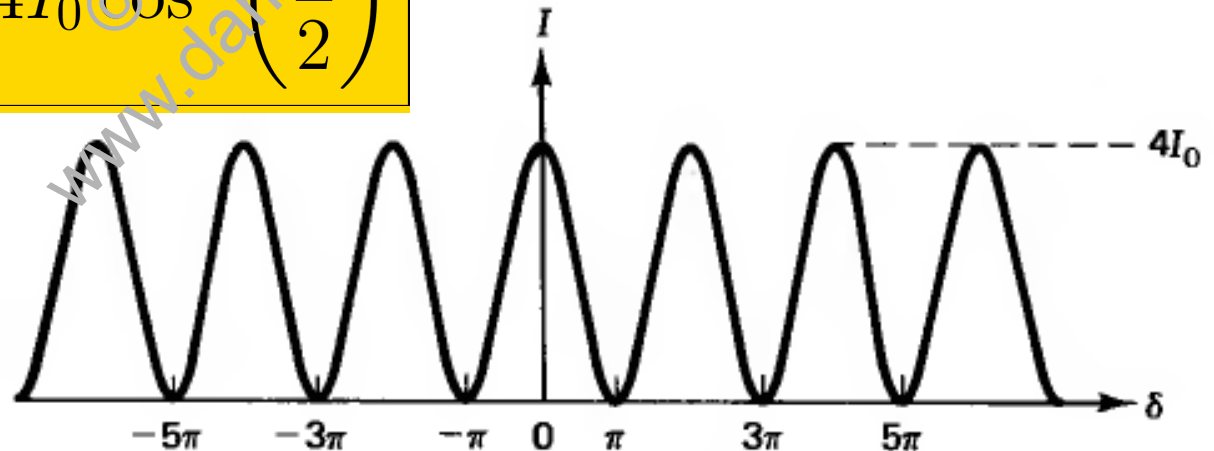
Dada la expresión general para la interferencia de dos ondas en un punto P :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta)$$

Consideremos el caso en que las amplitudes son iguales $E_{01} = E_{02}$, entonces $I_1 = I_2 = I_0$; por lo tanto:

$$I(P) = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos(\delta) = I_0 2 [1 + \cos(\delta)] \quad (*)$$

$$\Rightarrow I(P) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$



$$(*) [1 + \cos(A)] = 2 \cos^2(A/2)$$

Métodos para inducir un desfase entre dos ondas electromagnéticas

1. Diferencia de camino óptico: los dos haces se propagan por el mismo medio, pero recorren trayectorias de distinta longitud.
2. Que las ondas recorran materiales con diferente índice de refracción.
3. Que alguna se refleje en un medio con mayor índice de refracción que el medio incidente.

Diferencia de fase por diferencia de camino óptico

Diferencia de camino óptico: los dos haces de igual longitud de onda se propagan por el mismo medio (igual n), pero recorren trayectorias de distinta longitud.

$$\delta = k \cdot LCO_{(\text{dif})}$$

donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$LCO = \int_S^P n(s) ds = \dots = n \cdot \Delta\ell$$

$n = \text{cte}$
 $\Delta\ell = \overline{SP}$

El Experimento de Young: Interferencia por diferencia de camino

Thomas Young



Thomas Young

Nacimiento 13 de junio de 1773
Milverton, Somerset, Inglaterra
Fallecimiento 10 de mayo de 1829
Londres, Inglaterra
Campo Física, Fisiología, Egiptología

Thomas Young

Firma de Thomas Young

El Experimento de Young en (1802)

Se hace pasar luz monocromática por dos pequeñas ranuras separadas una distancia a (dos haces).

Las ranuras funcionan como dos fuentes coherentes S_1 y S_2 de igual intensidad, estado de polarización y fase inicial.

$$\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\| = k = 2\pi/\lambda$$

$$\phi_2 = \phi_1$$

Las interferencias entre los dos haces se observan en una pantalla situada a una distancia D de las rendijas.

A cada punto P de la pantalla llega un haz de cada fuente.

Cuando sobre la pantalla hay

- $\delta = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)
hay un **máximo de intensidad**.
- $\delta = \pm(2m + 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)
hay un **mínimo de intensidad**.

Esquema de la experiencia de Young de sus charlas en London's Royal Institution en 1802.

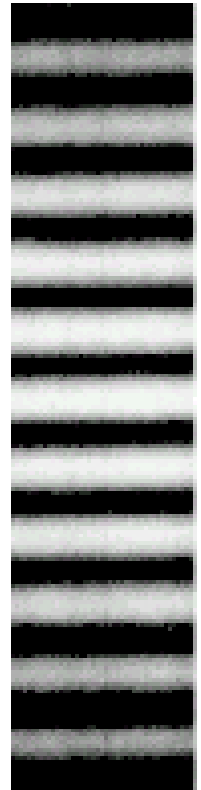
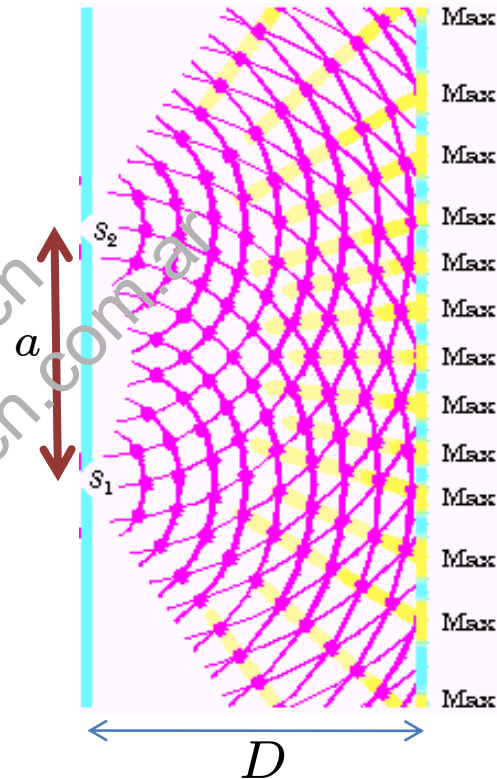
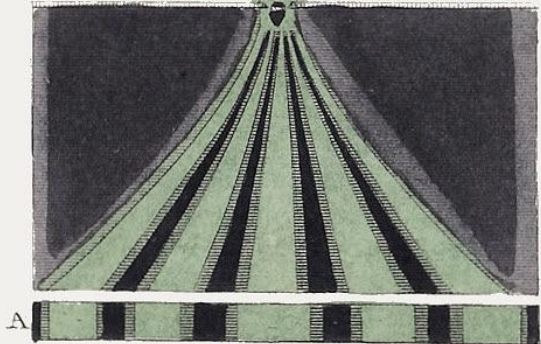
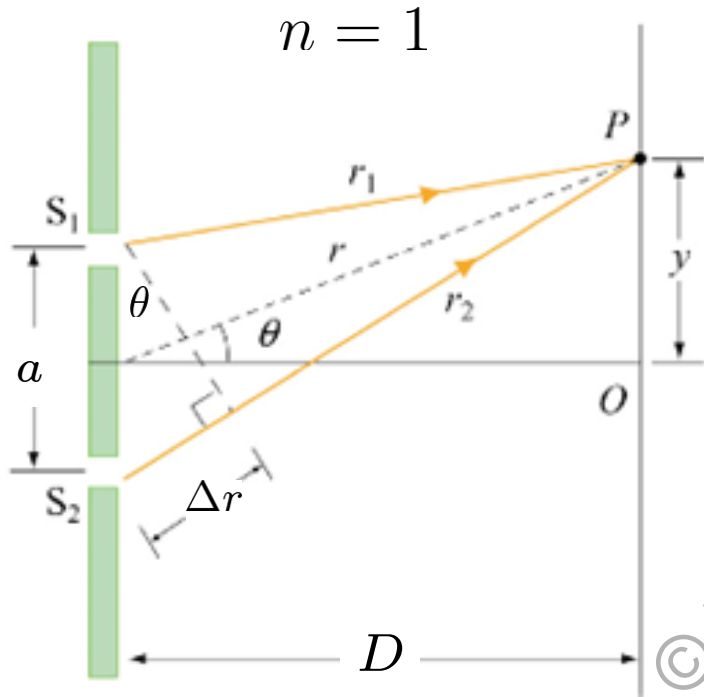


Fig. 442.



El Experimento de Young: diferencia geométrica de camino (región central de la pantalla)



El punto P sobre la pantalla:

- Se encuentra a una distancia r_1 de S_1 .
- Se encuentra a una distancia r_2 de S_2 .
- Está a una distancia y del eje de simetría.

Si D es lo suficientemente grande

- $r_1 \approx r_2 \approx r$
- $\Delta r = a \sin(\theta)$

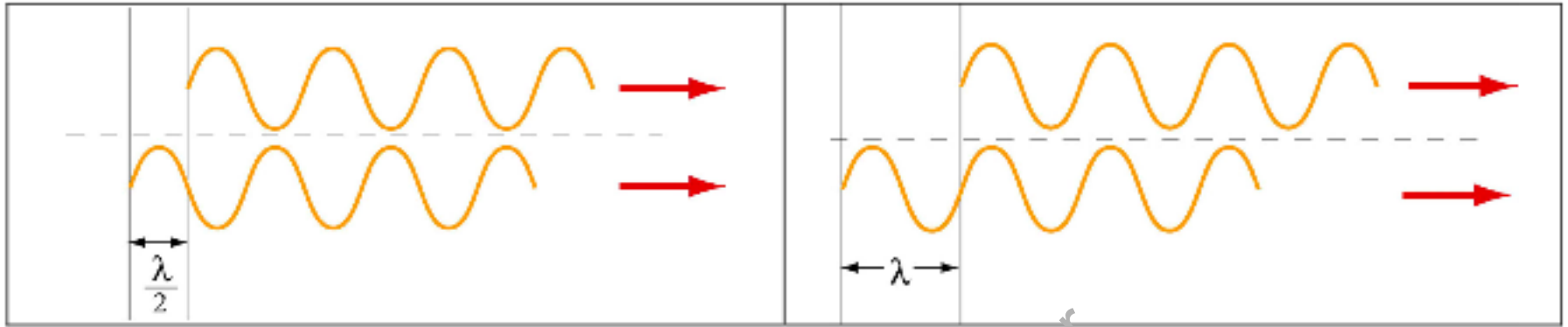
$$\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\| = \|\vec{k}\| = 2\pi/\lambda \quad \phi_2 = \phi_1$$

$$\Rightarrow \delta = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1 \equiv k r_2 - k r_1 = k(r_2 - r_1) = k \Delta r = \boxed{k a \sin(\theta)}$$

Si y es pequeña (**región central**): $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = y/D$

$$\Rightarrow \delta = \boxed{\frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{D}}$$

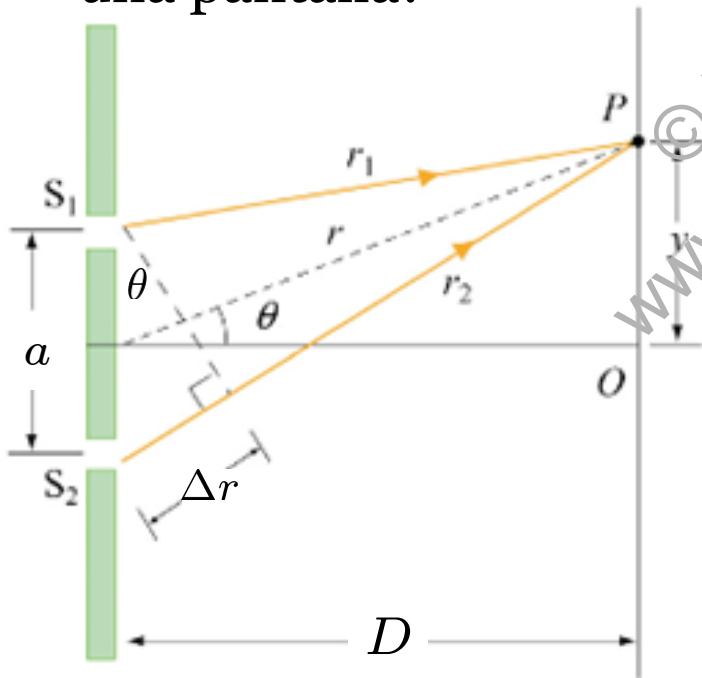




Interferencia destructiva

Interferencia constructiva

¿Cómo se pueden localizar las posiciones de las franjas sobre una pantalla?



Si $D \gg a$ esto implica que θ es pequeño y es válido aproximar

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{y}{D}$$

a) Interferencia constructiva (máximos de intensidad)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{D} = 2m\pi$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



$$y_m^{\text{máx}} = m \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$$

Posición de los máximos de intensidad sobre la pantalla (simétricos respecto del origen)

m	0	1	2	3
$y_m^{\text{máx}}$	0	$\frac{\lambda D}{a}$	$2 \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$	$3 \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$

b) Interferencia destructiva (mínimos de intensidad)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{D} = (2m + 1) \pi$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



$$y_m^{\text{mín}} = \left(\frac{2m + 1}{2} \right) \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$$

Posición de los mínimos de intensidad sobre la pantalla (simétricos respecto del origen)

m	0	1	2	3
$y_m^{\text{mín}}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$	$\frac{3}{2} \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$	$\frac{5}{2} \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$	$\frac{7}{2} \left(\frac{\lambda D}{a} \right)$

Distancia entre máximos sucesivos

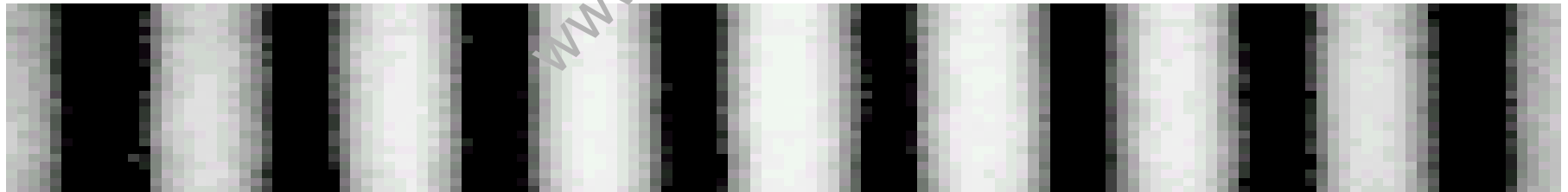
$$y_m^{\text{máx}} = m \left(\frac{\lambda D}{a} \right) \longrightarrow \Delta y_m^{\text{máx}} = y_{m+1}^{\text{máx}} - y_m^{\text{máx}} = \frac{\lambda D}{a}$$

Distancia entre mínimos sucesivos

$$y_m^{\text{mín}} = \left(\frac{2m+1}{2} \right) \left(\frac{\lambda D}{a} \right) \longrightarrow \Delta y_m^{\text{mín}} = y_{m+1}^{\text{mín}} - y_m^{\text{mín}} = \frac{\lambda D}{a}$$

$$\Delta y_m^{\text{máx}} = \lambda D / a$$

$$y_{-4}^{\text{máx}} \quad y_{-3}^{\text{máx}} \quad y_{-2}^{\text{máx}} \quad y_{-1}^{\text{máx}} \quad y_0^{\text{máx}} \quad y_1^{\text{máx}} \quad y_2^{\text{máx}} \quad y_3^{\text{máx}} \quad y_4^{\text{máx}}$$



$$y_{-4}^{\text{mín}} \quad y_{-3}^{\text{mín}} \quad y_{-2}^{\text{mín}} \quad y_{-1}^{\text{mín}} \quad y_0^{\text{mín}} \quad y_1^{\text{mín}} \quad y_2^{\text{mín}} \quad y_3^{\text{mín}}$$

$$\Delta y_m^{\text{mín}} = \lambda D / a$$

Intensidad observada sobre la pantalla

Si las dos ranuras son iguales y la intensidad luminosa que pasa por ambas es la misma, sabemos que la distribución de intensidad sobre un punto P de la pantalla es:

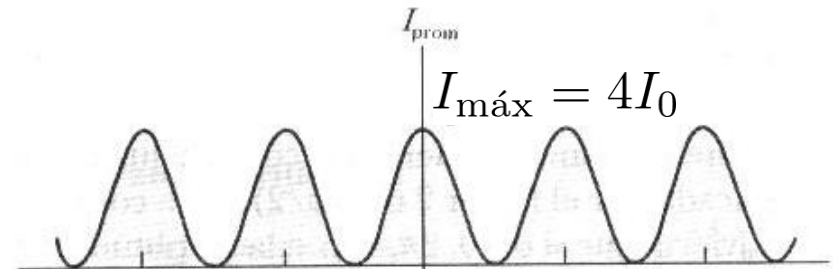
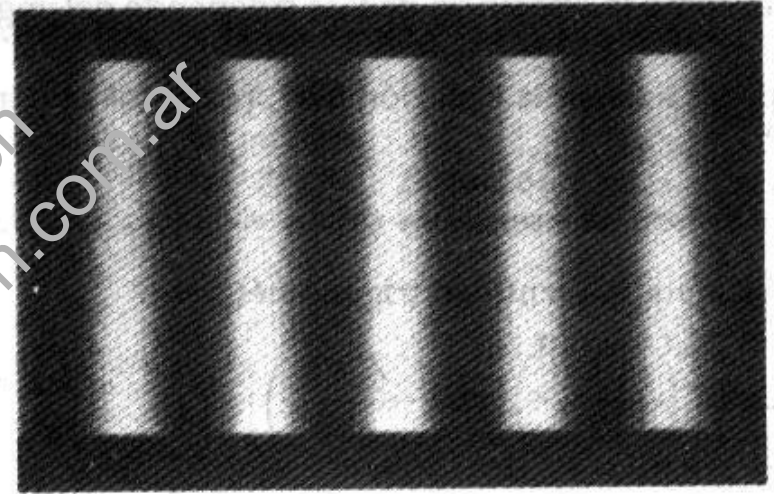
$$I(P) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{D}$$

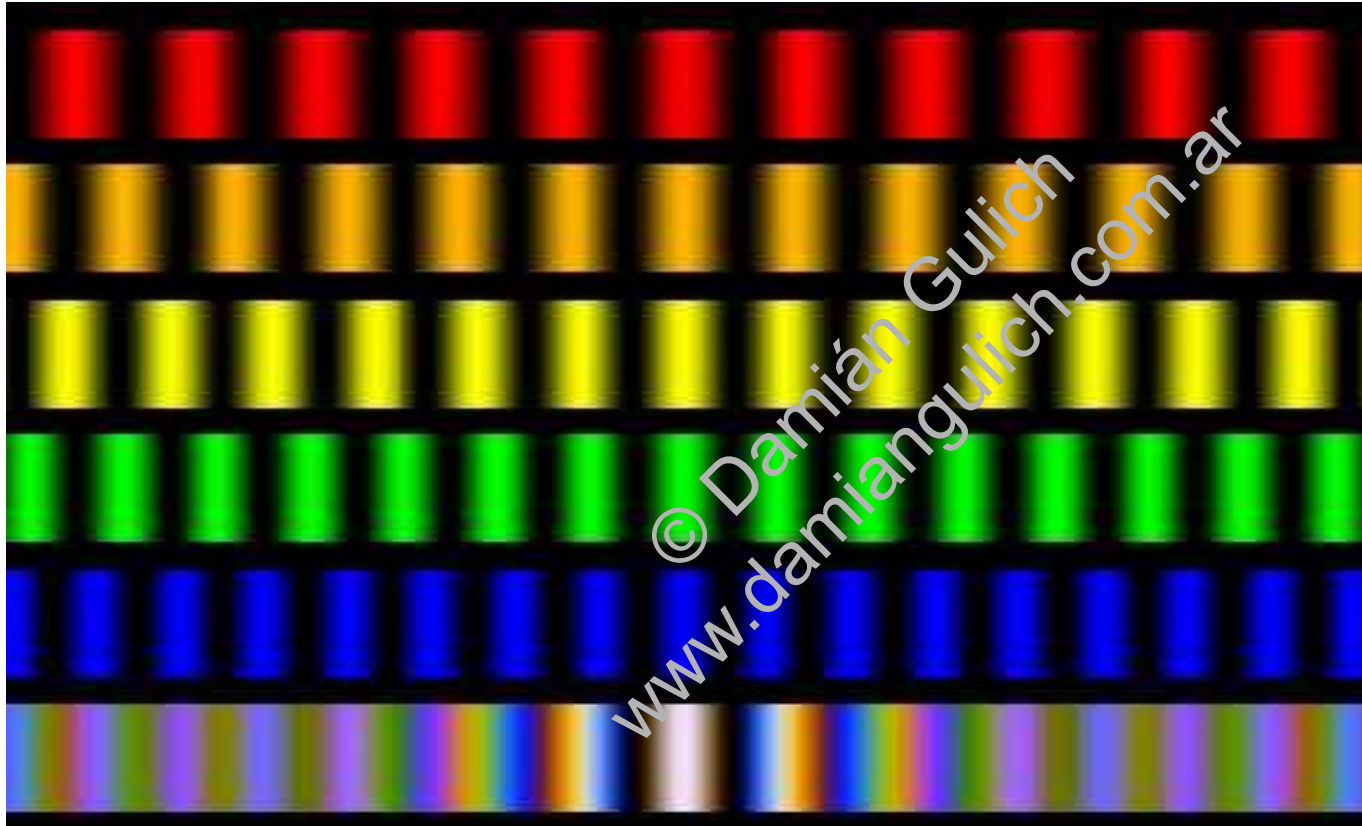
Región central

➔

$$I(y) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a y}{D\lambda} \right)$$



La distribución sobre una pantalla cambia con la longitud de onda



Disminuye λ
disminuye $\Delta\lambda$

$$\Delta y_m^{\text{máx, mín}} = \frac{\lambda D}{a}$$

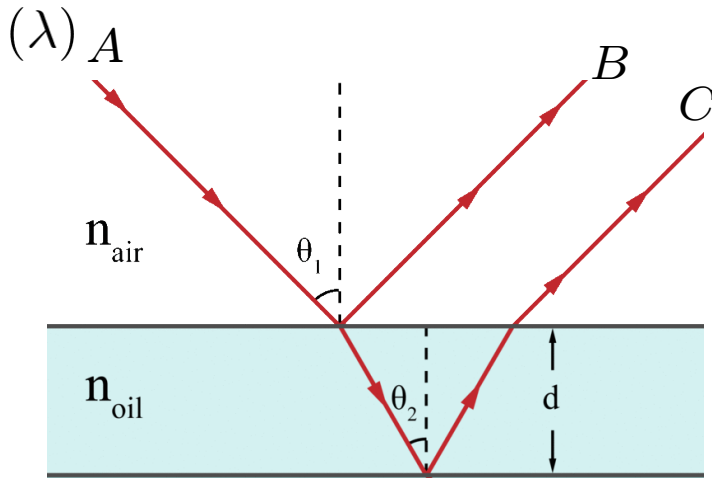
Luz blanca
(policromática)

Interferencia en láminas delgadas

- Pompas/películas de jabón
- Manchas de aceite
- Películas antirreflectantes
- Filtros de color
- Color por capa de óxido



Interferencia en láminas delgadas



Sólo consideramos a primeros rebotes

Consideramos que los rayos B y C originados por A en general interfieren entre ellos es según

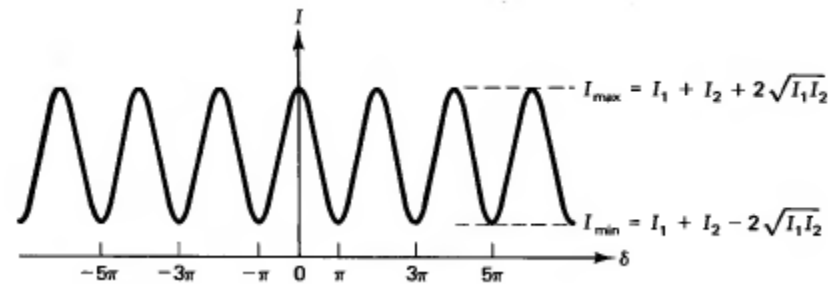
$$I(\delta_{BC}) = I_B + I_C + 2\sqrt{I_B I_C} \cos(\delta_{BC})$$

- Donde $\delta = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) hay un **máximo de intensidad**.
- Donde $\delta = \pm(2m + 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) hay un **mínimo de intensidad**.

Respecto del rayo incidente A

B : cambio de fase (por la reflexión)

C : cambio de fase (reflexión) + diferencia de camino óptico



$$\delta_{BC} = \delta_{AC} - \delta_{AB}$$

También se podría poner $\delta_{BC} = \delta_{AB} - \delta_{AC}$ pues $\cos(\delta)$ es una función par.

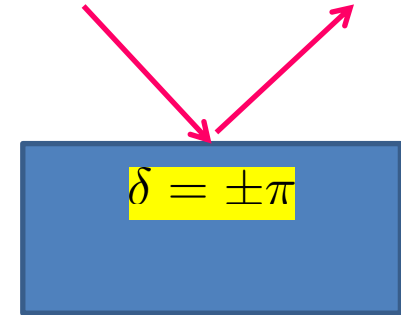
De las ecuaciones de Fresnel para dieléctricos, (trabajamos con E perpendicular al plano de incidencia)

Reflexión externa: si $n_i < n_t$ se cumple que

$$r_{\perp} = (E_{0r}/E_{0i})_{\perp} < 0 \text{ para todo } \theta_i$$

Hay un cambio de fase igual a $\delta = \pm\pi$ rad
para $(E_{0r})_{\perp}$ respecto de $(E_{0i})_{\perp}$.

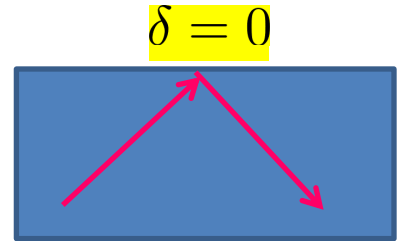
Puedo usar el signo que me convenga.



Reflexión interna: si $n_i > n_t$ se cumple que

$$r_{\perp} = (E_{0r}/E_{0i})_{\perp} > 0 \text{ para todo } \theta_i$$

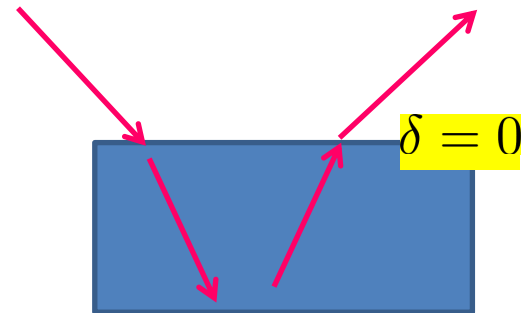
En particular, si $\theta_i > \theta_c$, $r_{\perp} = 1$ (reflexión total interna)
 $(E_{0r})_{\perp}$ está en fase respecto de $(E_{0i})_{\perp}$. Esto es: $\delta = 0$



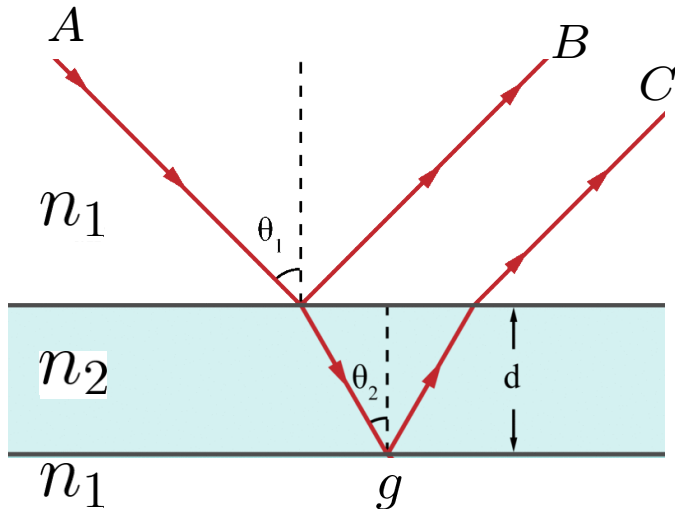
Transmisión: Se cumple que

$$t_{\perp} = (E_{0r}/E_{0i})_{\perp} > 0 \text{ para todo } \theta_i.$$

Hay un cambio de fase igual a $\delta \equiv 0$ tanto para
incidencia interna como externa.



Interferencia en películas delgadas por reflexión



Si $n_2 > n_1$ (reflexión externa) el rayo B tiene una diferencia de fase $\delta_{AB} = \pm\pi$ (rad) respecto del rayo A ($E_{\perp}$). Elijo en este caso el signo $(-)$.

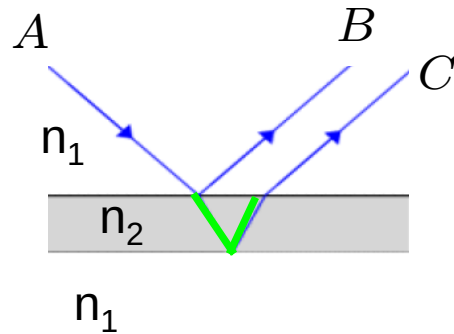
En el punto g (reflexión interna) el rayo C no se desfase del rayo A ($E_{\perp}$).

La diferencia de fase del C respecto de A es $\delta_{AC} = k \cdot LCO$;

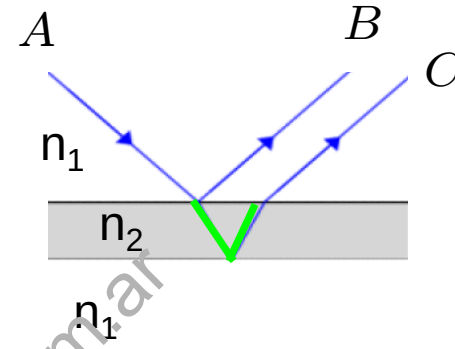
Si el ángulo es pequeño, la $LCO = n_2 2d$

$$\delta_{BC} = \delta_{AC} - \delta_{AB} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d + \pi$$

Interferencia en películas delgadas por reflexión



Si $n_1 < n_2$ el desfase en π lo produce la reflexión en la interfase superior.



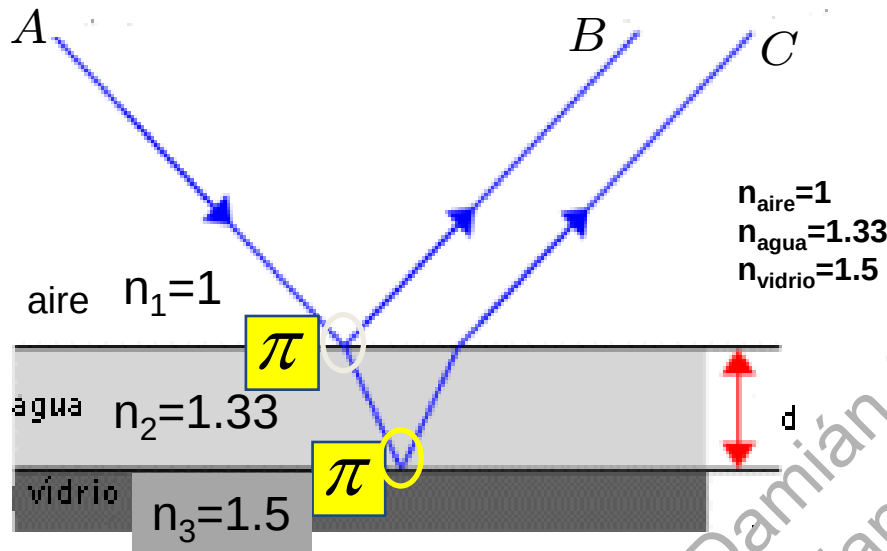
Si $n_1 > n_2$ el desfase en π lo produce la reflexión en la interfase inferior.

En ambos casos

$$\delta_{BC} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d + \pi$$

Interferencia en películas delgadas por reflexión (3 capas)

Caso 1



Si $n_1 < n_2 < n_3$

Los rayos B y C tienen un desfase de π respecto al rayo A (la reflexión se produce en ambos casos desde un medio con un índice de refracción menor a otro transmitido con índice mayor).

$$\delta_{BC} = \delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d$$

Interferencia constructiva:

$$\delta = 2m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Se puede hallar λ en cada caso:

$$\longrightarrow \lambda = \frac{2n_2 d}{m} \quad (m \geq 1)$$

Interferencia destructiva:

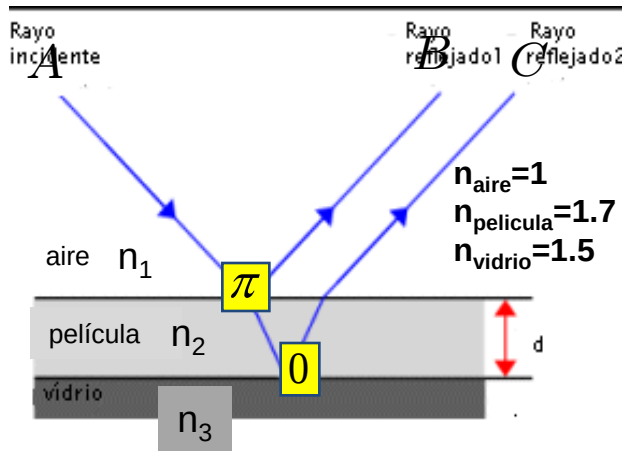
$$\delta = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\longrightarrow \lambda = \frac{4n_2 d}{2m + 1} \quad (m \geq 0)$$

Interferencia en películas delgadas por reflexión (3 capas)

Caso 2

Si $n_1 < n_2 > n_3$



$$\delta_{AB} = \pi \text{ (reflexión } n_1 < n_2)$$

$$\delta_{AC} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2n_2 d \text{ (diferencia de camino óptico).}$$

$$\delta_{BC} = \delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d + \pi$$

Interferencia constructiva:

$$\delta = 2m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Se puede hallar los espesores d según cada caso:

$$d_{\text{brillante}} = \frac{(2m - 1)\lambda}{4n_2} \quad (m \geq 1)$$

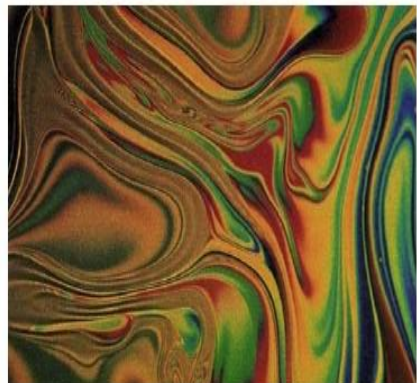
Interferencia destructiva:

$$\delta = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$d_{\text{oscura}} = \frac{m\lambda}{2n_2} \quad (m \geq 1)$$

Si la lámina tiene espesor variable y se ilumina con luz blanca, las condiciones valen para cada color (λ).

Ejemplos: pompas de jabón, películas aceite sobre asfalto.





Tempering colors of steel

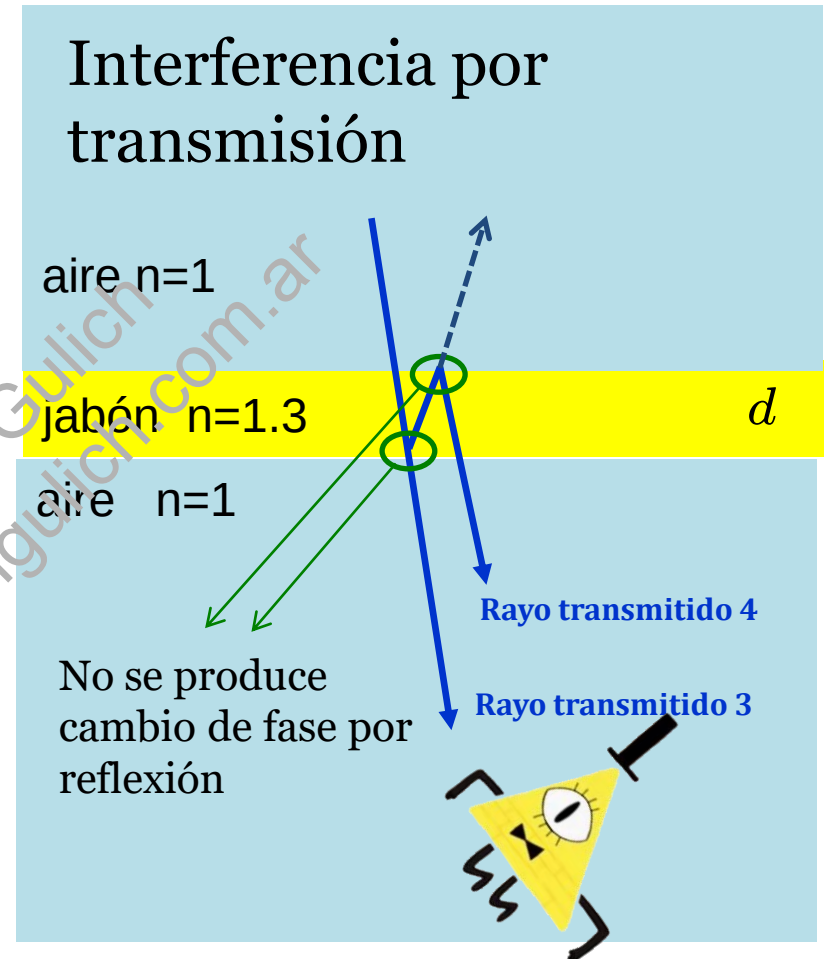
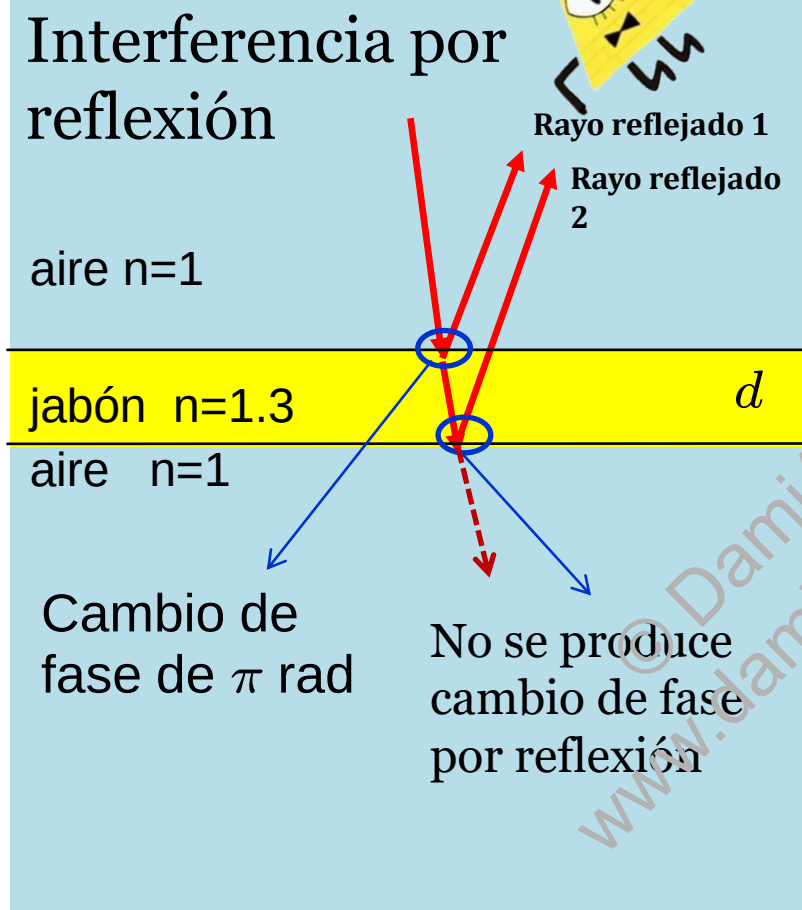


Heat Bluing A Set
Of Steel Clock
Hands.



Making, Polishing And Blueing
The Bezel Screws.

Interferencia en películas delgadas por transmisión



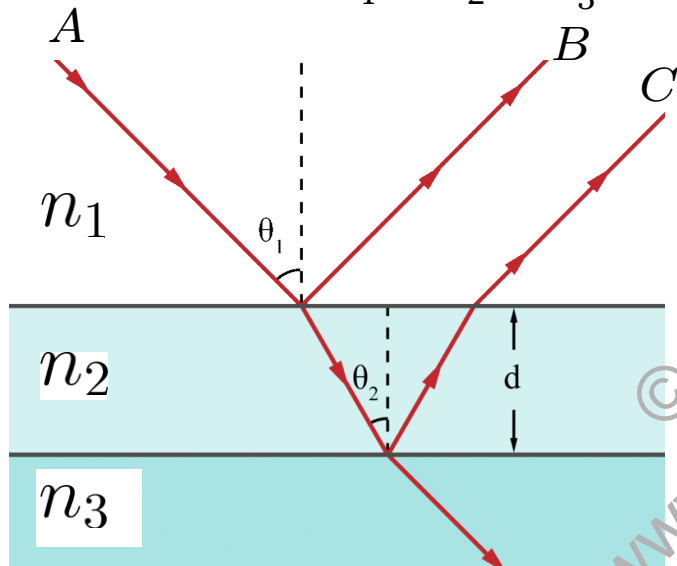
La componente del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia sufre un corrimiento de fase de π radianes bajo reflexión cuando el medio incidente tiene un índice menor que el medio transmisor $n_{\text{inc}} < n_{\text{trans}}$.

Películas antirreflectantes

Las *películas antirreflectantes* son capas de dieléctrico que se colocan en la interfase entre dos medios transparentes y minimizan la reflexión en las superficies.

Ejemplo: “coating” (recubrimiento) en cámaras fotográficas, telescopios, etc.

En este caso $n_1 < n_2 < n_3$.



$$\delta_{AB} = \pi \text{ (refl. en medio más denso)}$$
$$\delta_{AC} = (2\pi/\lambda)2n_2d + \pi \text{ (dif. camino óptico)}$$

$$\delta_{BC} = \delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda}n_2 2d$$

Interferencia destructiva:

$$\delta = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Imponemos la condición de mínimo porque queremos que se refleje la *menor* intensidad luminosa posible.



$$d = \frac{\lambda}{4n_2}$$

Espesor mínimo de la película para atenuar λ .

Películas antirreflectantes, cancelación completa

Para cancelar completamente la reflexión ($\theta \sim 0$), imponemos que las reflectancias R en las superficies sean *iguales*. La reflectancia (ver clase anterior) es:

$$(R)_{\parallel, \perp} = (I_r/I_i)_{\parallel, \perp} = r_{\parallel, \perp}^2 = (E_{0r}/E_{0i})_{\parallel, \perp}^2$$

A incidencia normal ($\theta \sim 0$):

$$(R)_{\parallel, \perp} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

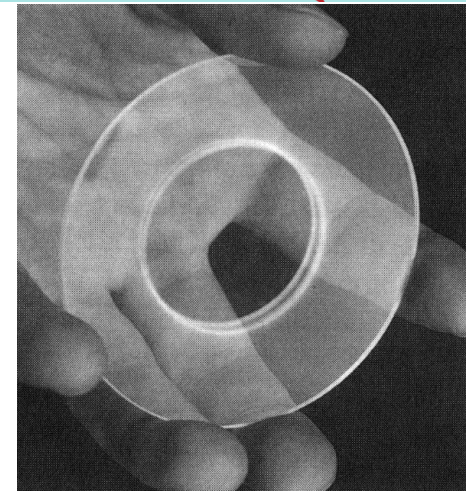
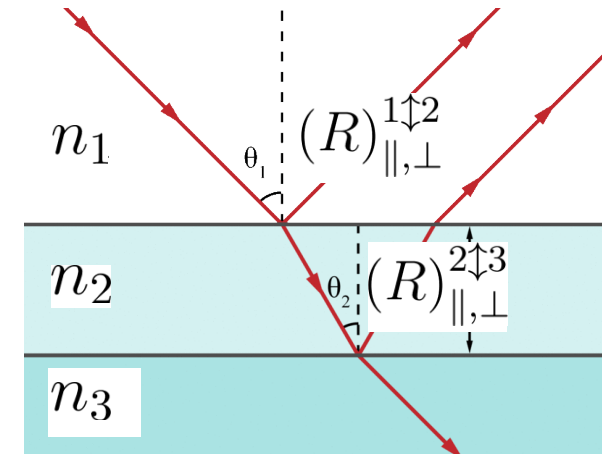
$$(R)_{\parallel, \perp}^{1\downarrow 2} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (\text{Interfase 1-2})$$

$$(R)_{\parallel, \perp}^{2\downarrow 3} = \left(\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \right)^2 \quad (\text{Interfase 2-3})$$

Igualando y desarrollando, podemos despejar:

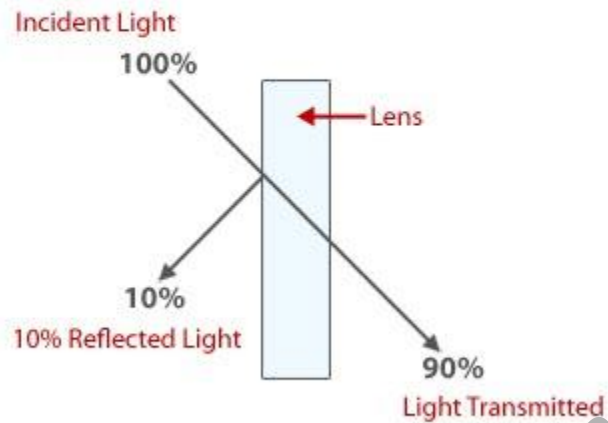
$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$$

Ejemplo: para la interfase aire ($n_1 = 1$) y vidrio ($n_3 = 1,5$) encontramos que $n_2 = 1,22$.

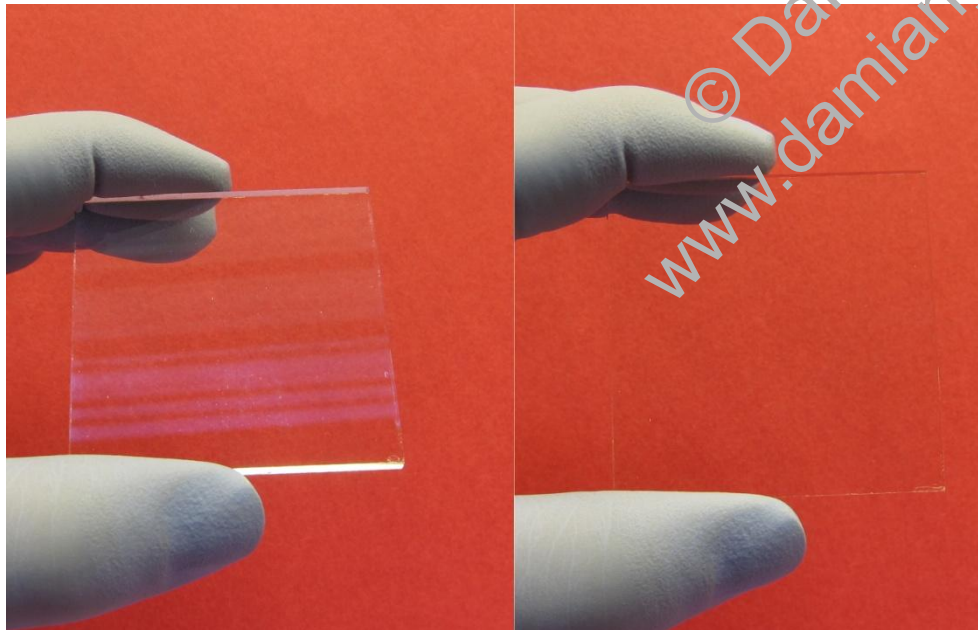
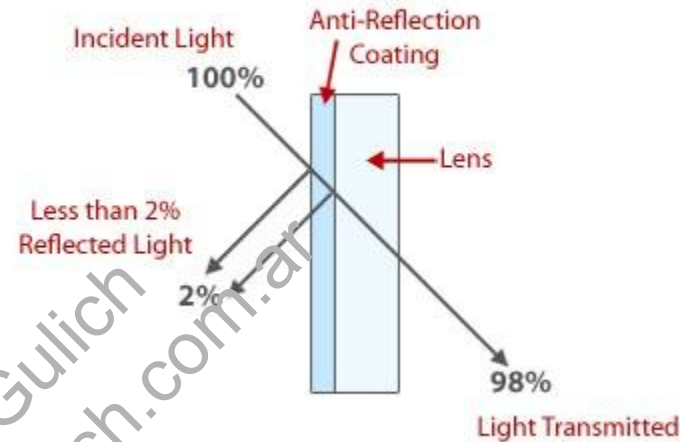


Películas antirreflectantes

Lens Without Anti-Reflection Coating



Lens With Anti-Reflection Coating



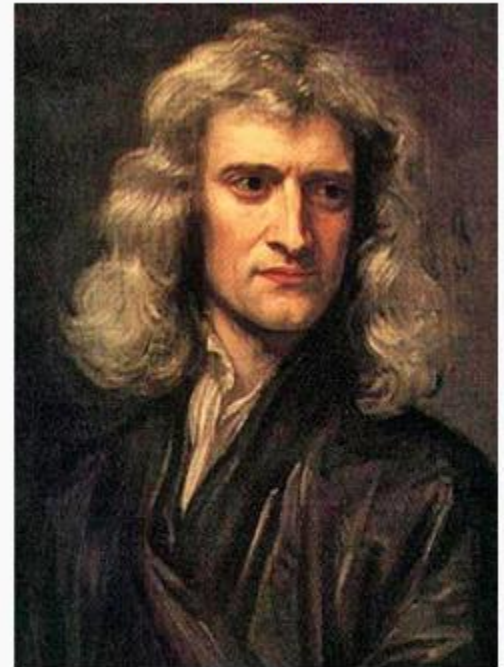
WITHOUT AR



WITH AR

Franjas de interferencia

Sir Isaac Newton

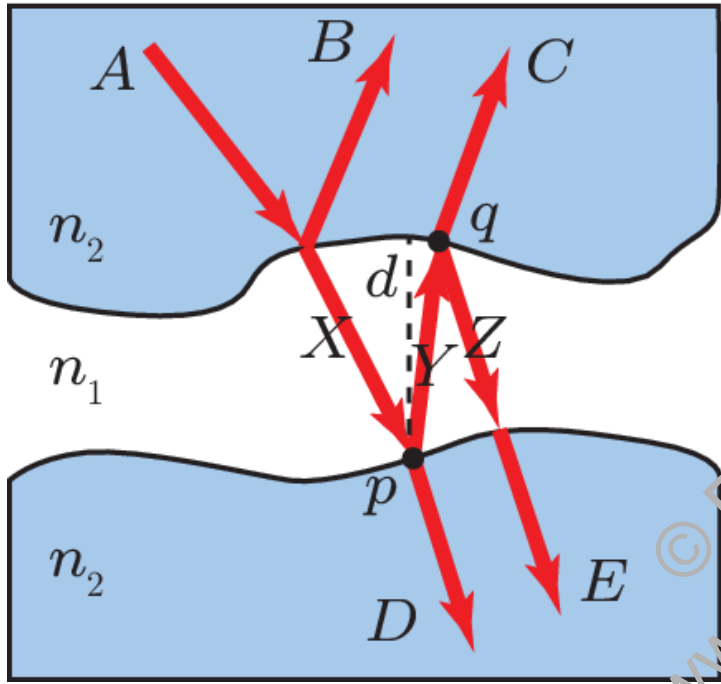


Portrait of Newton in 1689 by [Godfrey Kneller](#)

Born	25 December 1642 [NS: 4 January 1643] ^[1] Woolsthorpe, Lincolnshire, England
Died	20 March 1726/7 (aged 84) [OS: 20 March 1726 NS: 31 March 1727] ^[1] Kensington, Middlesex, England

Interferencia en películas delgadas

Caso general ($n_2 > n_1$)



- Supongamos $n_2 > n_1$
- B y C son los rayos vistos por *reflexión*.
- D y E son los rayos vistos por *transmisión*.
- Si A incide con un ángulo chico:
 $\Delta \ell_X \sim \Delta \ell_Y \sim \Delta \ell_Z \sim d$.

$$\delta_{BC} = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 2d + \pi$$

$$\delta_{DE} = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 2d + \underbrace{2\pi}_{\uparrow} \equiv \delta_{DE} = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 2d$$

$$I(\delta_{BC}) = I_B + I_C + 2\sqrt{I_B I_C} \cos(\delta_{BC})$$

$$I(\delta_{DE}) = I_D + I_E + 2\sqrt{I_D I_E} \cos(\delta_{DE})$$

$$\cos(u \pm 2\pi) = \cos(u)$$

Veremos dos geometrías en las cuales se puede expresar d en función de una coordenada y plantearemos las condiciones de máximos y mínimos de interferencia.

A. Cuñas ópticas

Consideramos el caso una cuña de aire u otro medio que forma un ángulo β (pequeño) entre dos vidrios (basta que el índice de refracción del medio cumpla que $n_a < n_v$). El mismo razonamiento se puede repetir para una cuña de vidrio en aire. Para una onda monocromática y caso de observación por reflexión en una cuña de aire:

$$\delta_{AB} = 0 \text{ (refl. en medio menos denso)}$$

$$\delta_{AC} = (2\pi/\lambda)2n_a d + \pi \text{ (dif. camino óptico + refl.)}$$



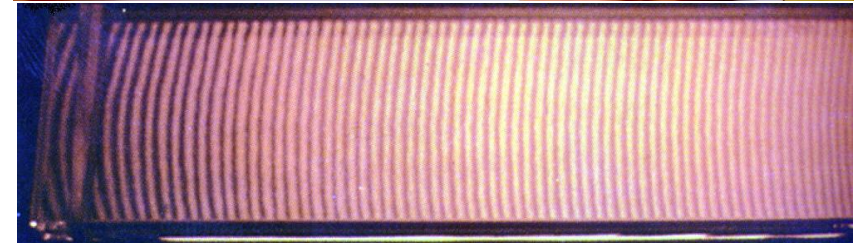
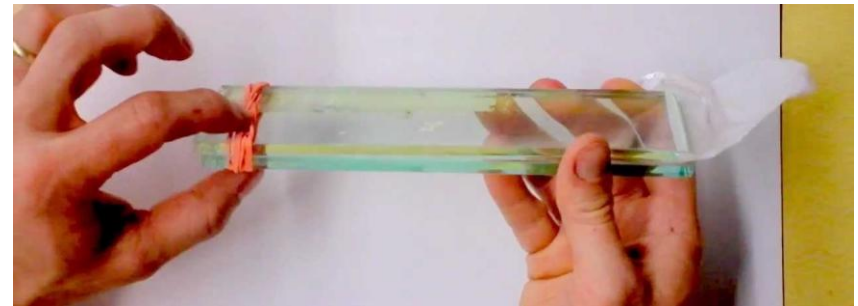
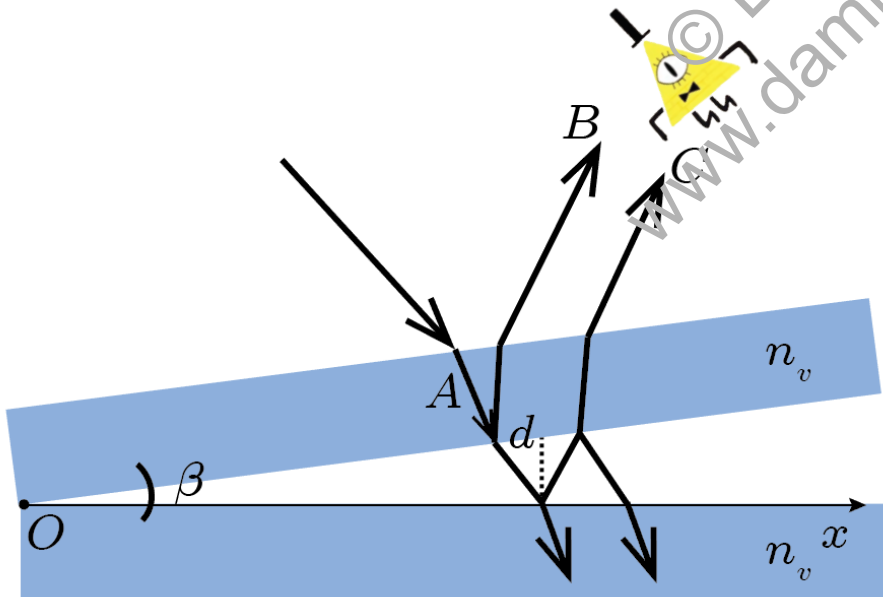
$$\delta_{BC} = \delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2d + \pi$$

Interferencia constructiva:

$$\delta = 2m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Interferencia destructiva:

$$\delta = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$



A. Cuñas ópticas (cuña de aire vista por reflexión)

Como el vidrio de arriba es plano, el espesor d en función de x se encuentra como:

$$d(x) = \tan(\beta)x \approx \beta x$$

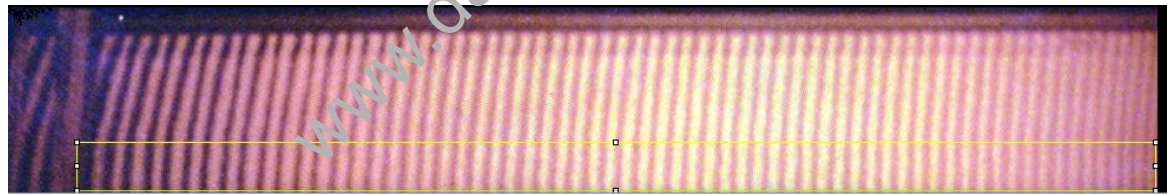
pues si $\beta \approx 0 \rightarrow \tan(\beta) \approx \beta$

★

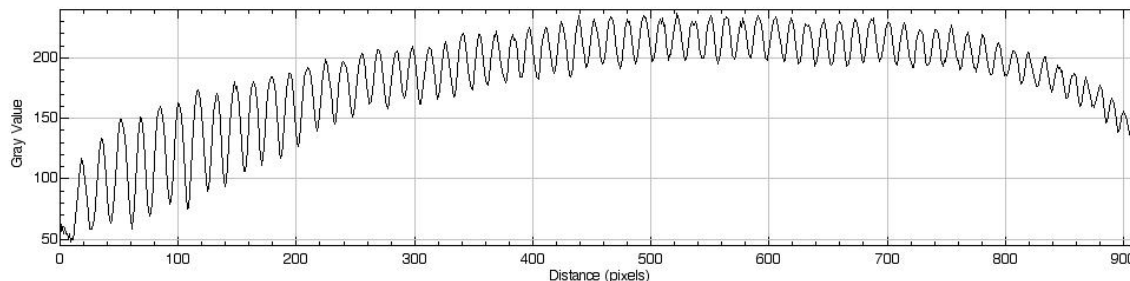
$$\delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2d + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2\beta x + \pi$$

De las condiciones de interferencia constructiva y destructiva, podemos encontrar las posiciones de los máximos y mínimos de intensidad:

$$x_{\text{máx}} = (2m - 1) \frac{\lambda}{4n_a\beta}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad x_{\text{mín}} = m \frac{\lambda}{2n_a\beta}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$



Plot of air_wedge_pattern2
993.83x248.76 pixels (996x255); 8-bit; 248K



B. Anillos de Newton

A diferencia de la cuña, ahora la superficie de arriba es esférica de radio R . Consideramos el caso del espacio entre vidrios lleno de aire u otro medio que forma (basta que el índice de refracción del medio cumpla que $n_a < n_v$). Para una onda monocromática y caso de observación por reflexión:

$$\delta_{AB} = 0 \text{ (refl. en medio menos denso)}$$

$$\delta_{AC} = (2\pi/\lambda)2n_a d + \pi \text{ (dif. camino óptico + refl.)}$$



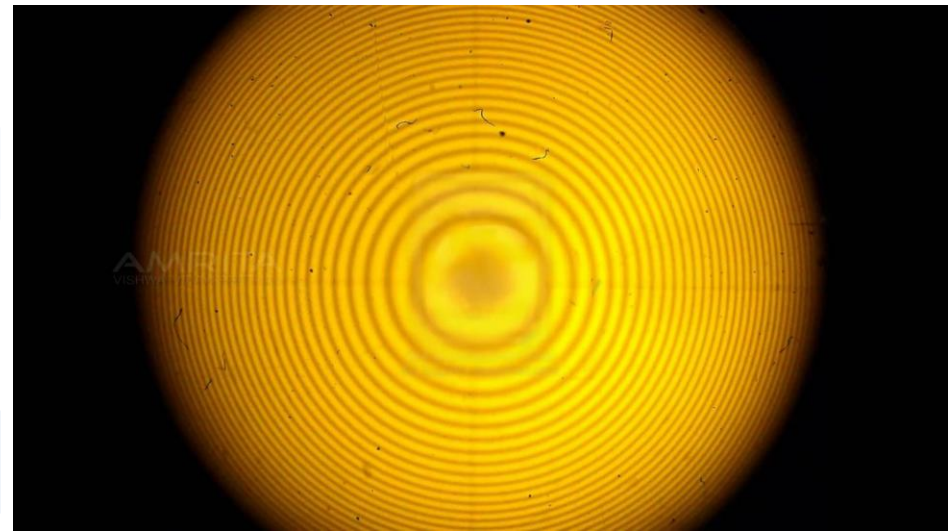
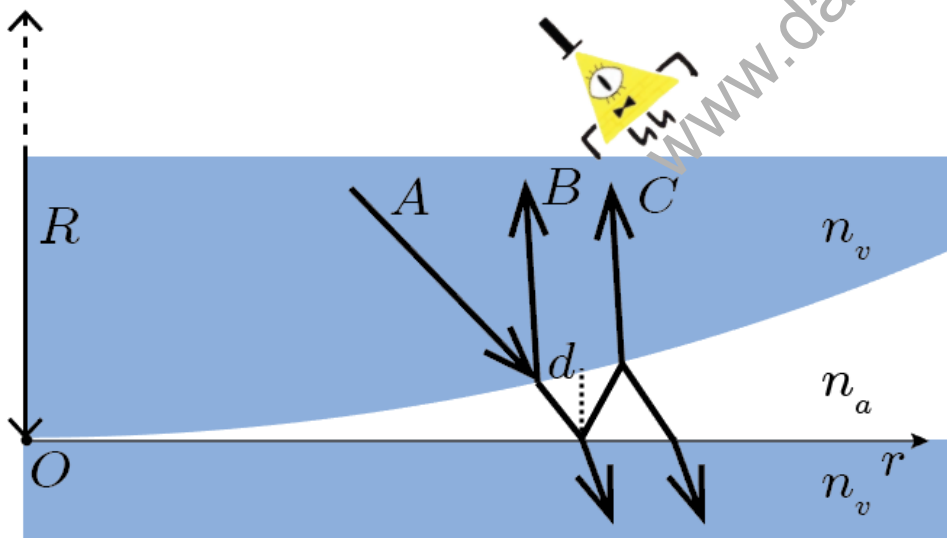
$$\delta_{BC} = \delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2d + \pi$$

Interferencia constructiva:

$$\delta = 2m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Interferencia destructiva:

$$\delta = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$



B. Anillos de Newton (por reflexión)

Como el vidrio de arriba es esférico, el espesor d en función de r se encuentra de la ecuación de una circunferencia:

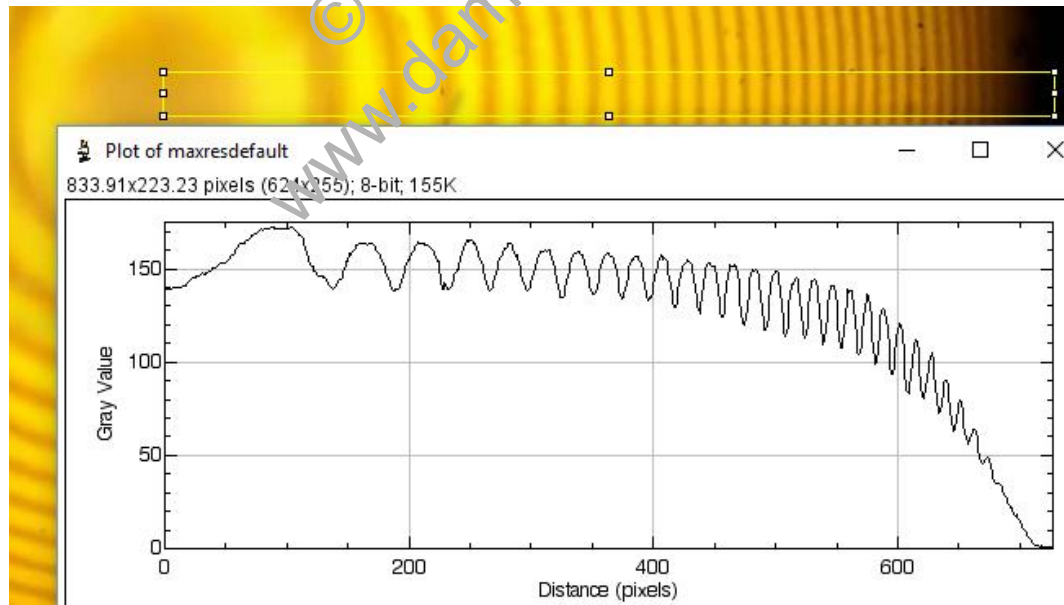
$$r^2 + (R - d)^2 = R^2 \implies r^2 \approx 2Rd \quad (\text{si } d^2 \ll 2Rd)$$



$$\delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2d + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2 \left(\frac{r^2}{2R} \right) + \pi$$

$$r_{\text{máx}} = \sqrt{(2m - 1) \frac{R\lambda}{2n_a}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad r_{\text{mín}} = \sqrt{m \frac{R\lambda}{n_a}}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por reflexión, el centro es una mancha oscura



B. Anillos de Newton (por transmisión)

$$\delta_{AD} = 0$$

$$\delta_{AE} = (2\pi/\lambda)2n_a d + 2\pi \text{ (dif. camino óptico + 2 refl.)}$$

$$\delta_{DE} = \delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2d = \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2 \left(\frac{r^2}{2R} \right)$$

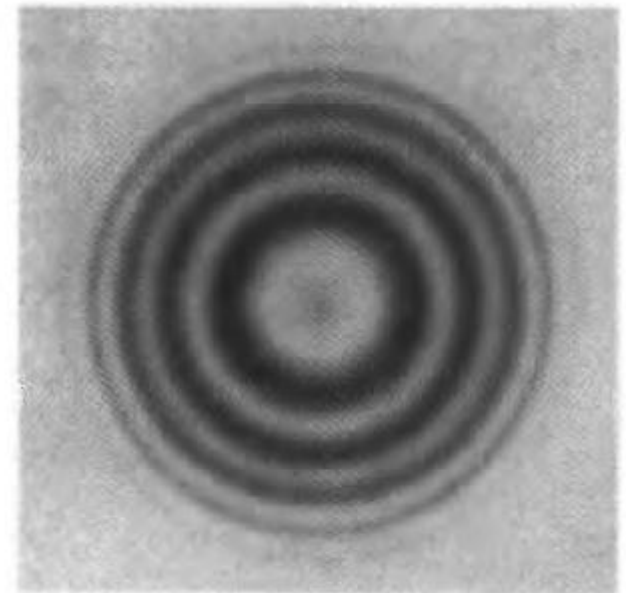
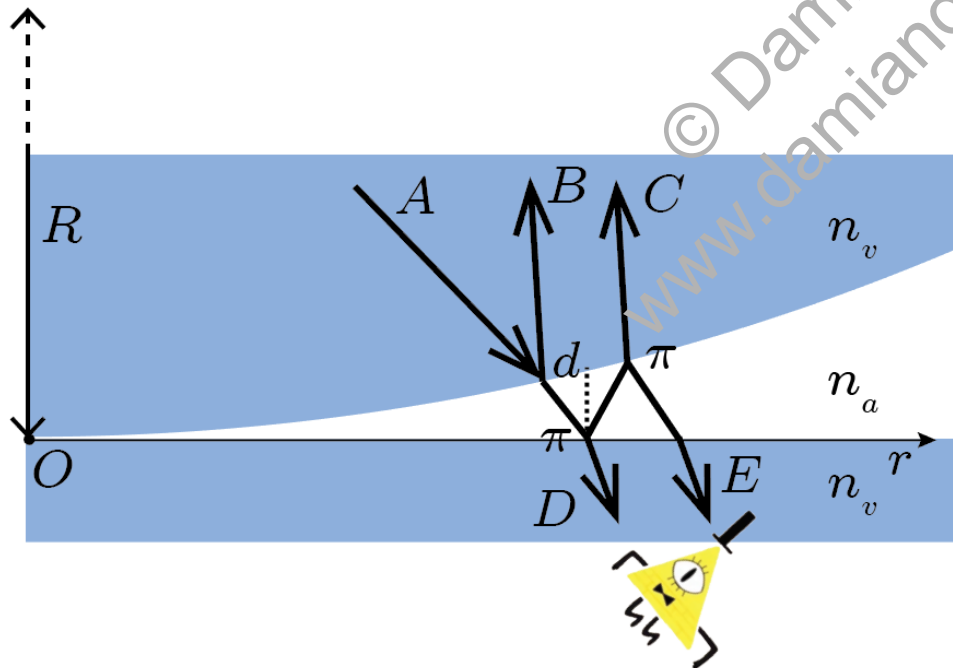
Interferencia constructiva:

$$\delta = 2m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Interferencia destructiva:

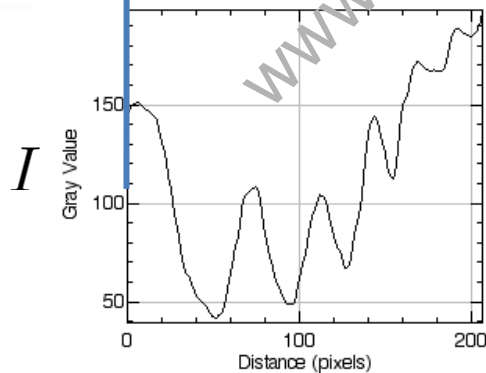
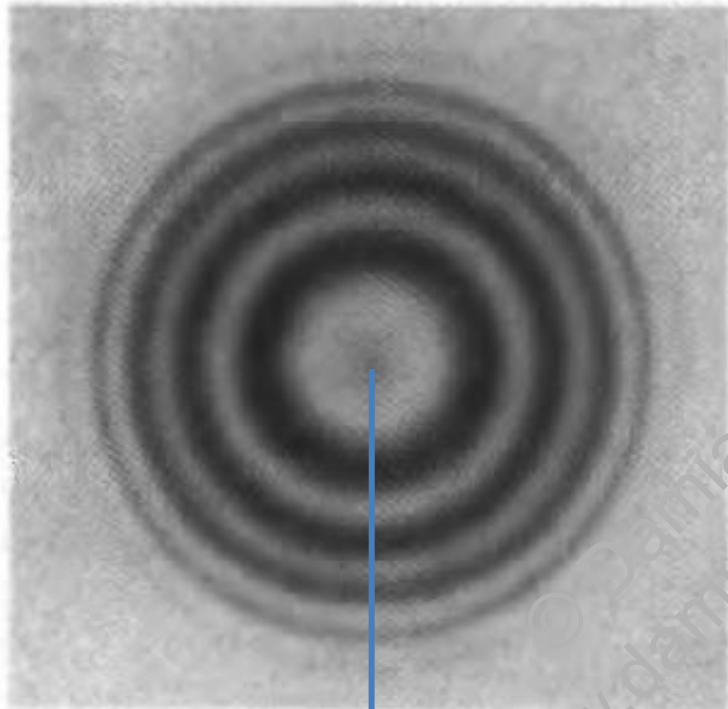
$$\delta = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Por transmisión, el centro es una mancha brillante



B. Anillos de Newton (comparados)

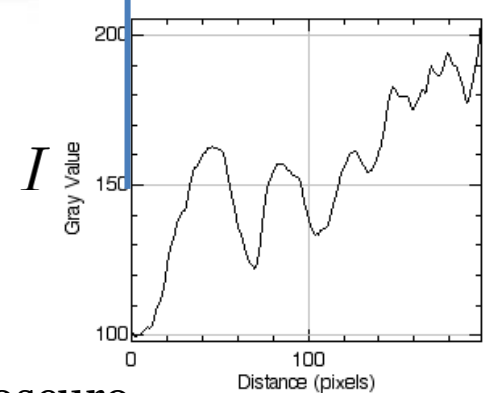
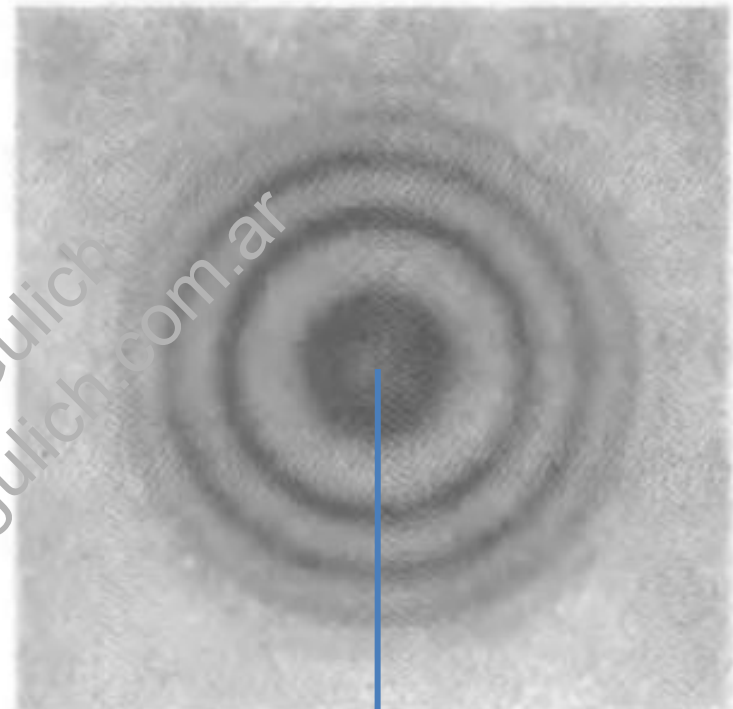
Transmisión



Centro brillante

$$\propto r$$

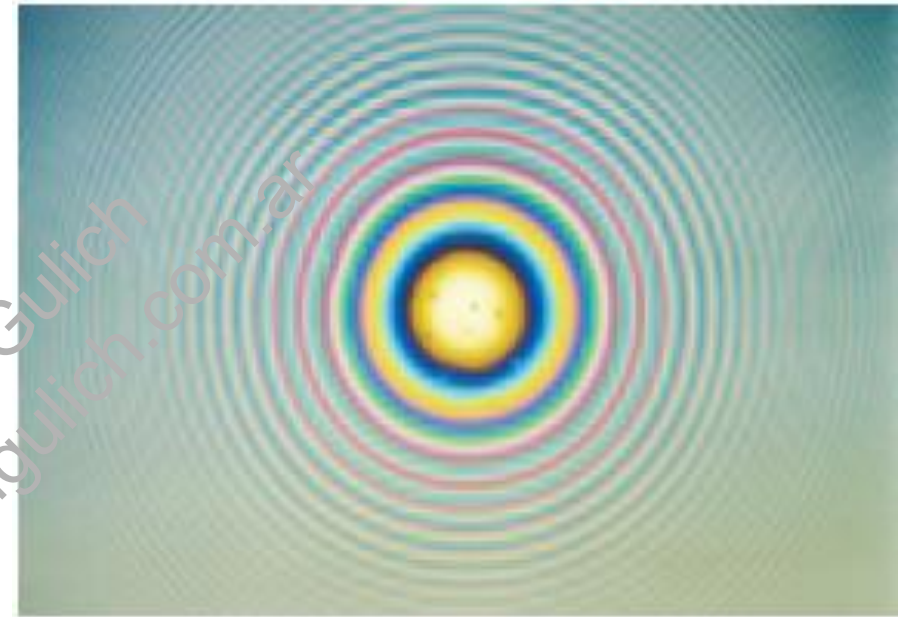
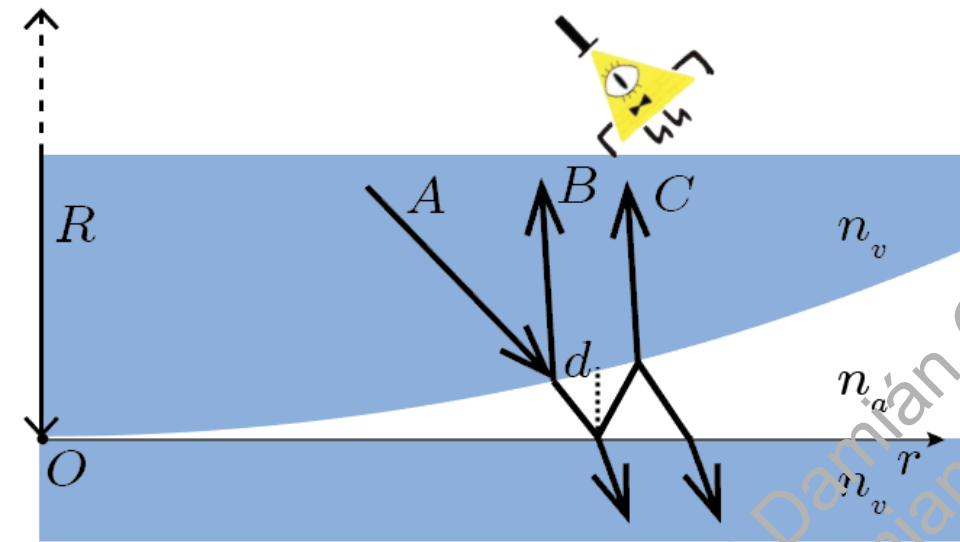
Reflexión



Centro oscuro

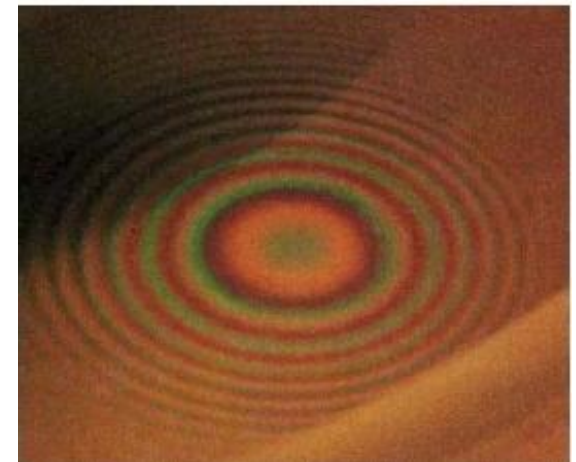
$$\propto r$$

B. Anillos de Newton (dispersión de colores)

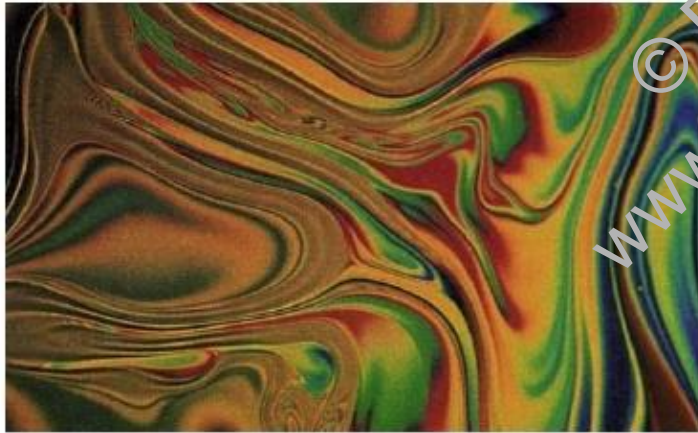
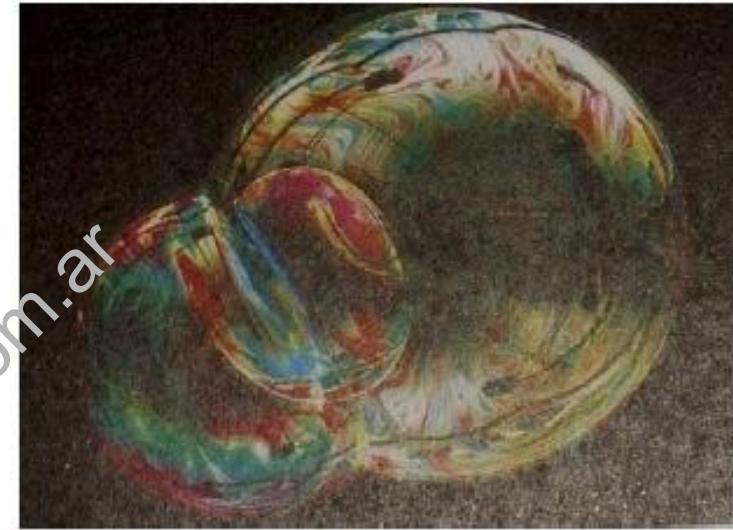
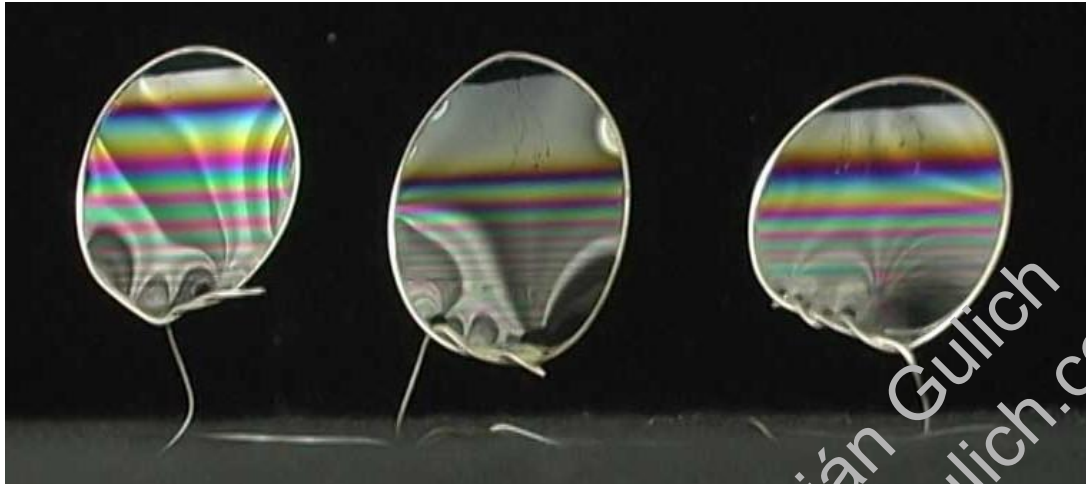


$$\delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n_a 2 \left(\frac{r^2}{2R} \right) + \pi \quad (\text{Reflexión})$$

En la diferencia de fase hay una dependencia inversa con la longitud de onda. Las posiciones de máximos y mínimos se modifican para cada color.

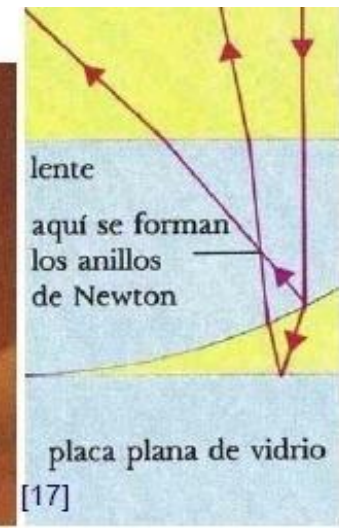
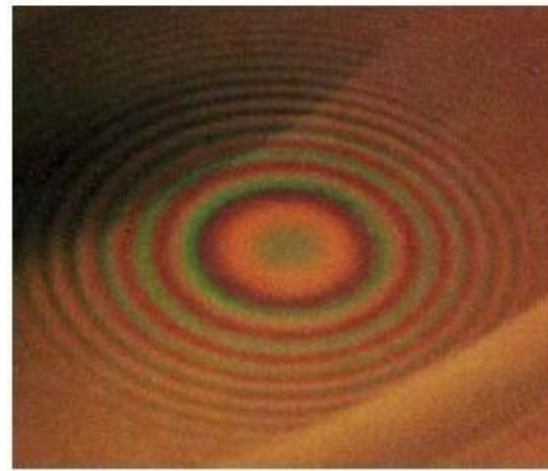


Ejemplos de interferencia



Película de petróleo
sobre agua

**Análisis de calidad de componentes
ópticos:** anillos de Newton (en lentes)



Preguntas

© Damian Gulich
www.damiangulich.com.ar