

02.06. ECUACIONES DE FRESNEL, POLARIZACIÓN

Damián Gulich
2020

Ecuaciones de Fresnel

Augustin Fresnel



Información personal

Nacimiento	10 de mayo de 1788 Brogie, Francia
Fallecimiento	14 de julio de 1827 (39 años) Ville-d'Avray, Francia
Causa de muerte	Tuberculosis
Lugar de sepultura	Cementerio del Père-Lachaise
Nacionalidad	Francés

Ecuaciones de Fresnel

Encontraremos las relaciones de **amplitud y fase** entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que representan las ondas

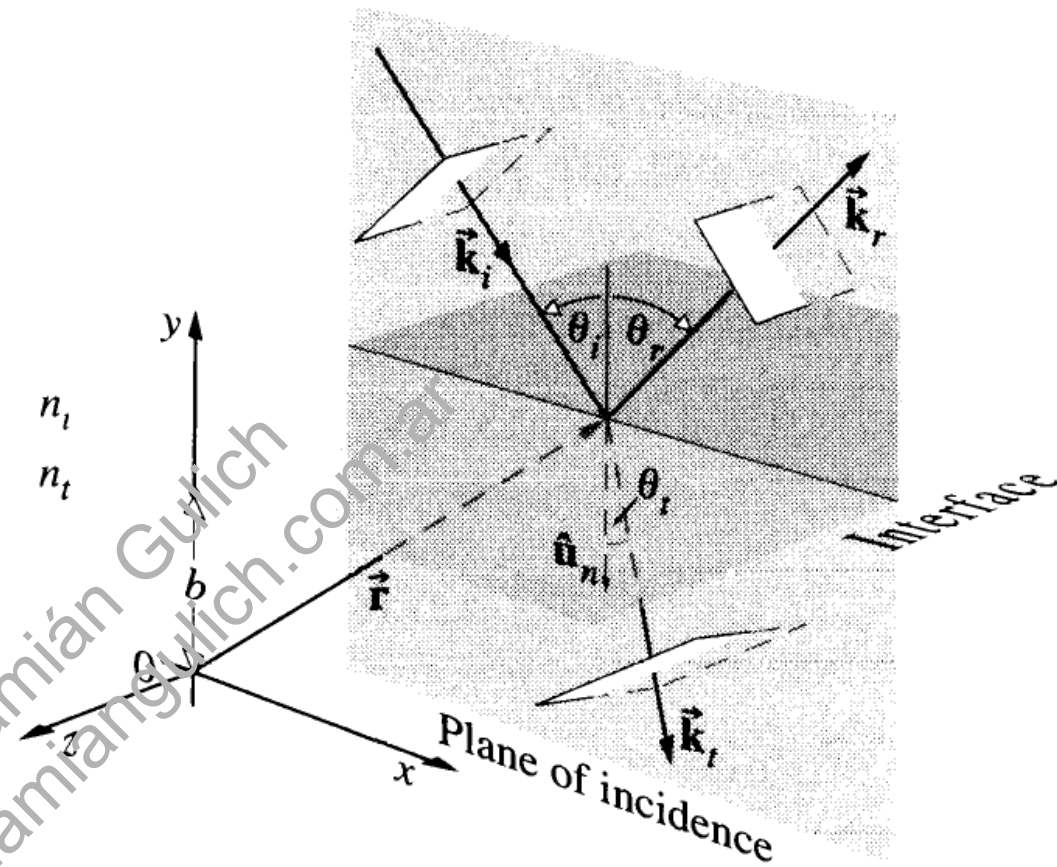
- *incidente* $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$,
- *reflejada* $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$
- *transmitida* $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$

entre dos medios dieléctricos homogéneos e isotrópicos de distinto índice de refracción:

- n_i es el índice refracción medio incidente.
- n_t es el índice refracción medio transmitido.

- La Óptica Geométrica no pueden decir cuánto se refleja y cuánto se transmite en una interfase.

- Esto debe ser derivado de las ecuaciones de Maxwell.



- Estos fenómenos se describen en términos de los coeficientes de reflexión (R) y de transmisión (T) que son, respectivamente, fracción de la amplitudes (intensidades) incidente a reflejada e incidente a transmitida.

Vector de propagación

Supongamos que una onda plana monocromática incide sobre la superficie de la interfase entre los dos medios.

Definimos el *vector de propagación* ($\vec{k}$) como un vector paralelo a la dirección de propagación de la onda (Poynting):

$$\vec{k} // \vec{S} // \vec{E} \times \vec{B}$$
$$\|\vec{k}\| = \text{cte} = 2\pi/\lambda$$

$$\Rightarrow \text{Norma para una onda plana: } E(\vec{r}, t) = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

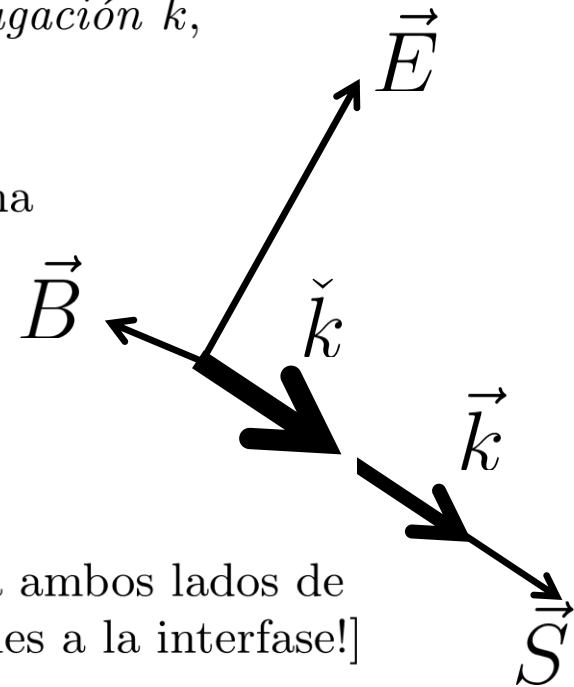
Por conveniencia también podemos usar el *versor de propagación* $\check{k}$, que apunta en la misma dirección que $\vec{k}$ y tiene la ventaja que $\|\check{k}\| = 1$ (sin unidades).

Así como $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ formaban una terna ordenada a derecha también será terna ordenada a derecha $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\check{k}$ (o $\vec{k}$);

$$\check{k} \cdot \vec{E} = 0; \quad \check{k} \times \vec{E} = v \vec{B}$$

Condiciones de contorno en una interfase:

- Las componentes **tangenciales** de $\vec{E}$ se conservan a ambos lados de la interfase (así como las de $\vec{H} = \vec{B}/\mu$). [¡Tangenciales a la interfase!]
- Las componentes **normales** de $\vec{B}$ se conservan a ambos lados de la interfase (así como las de $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$). [¡Normales a la interfase!]



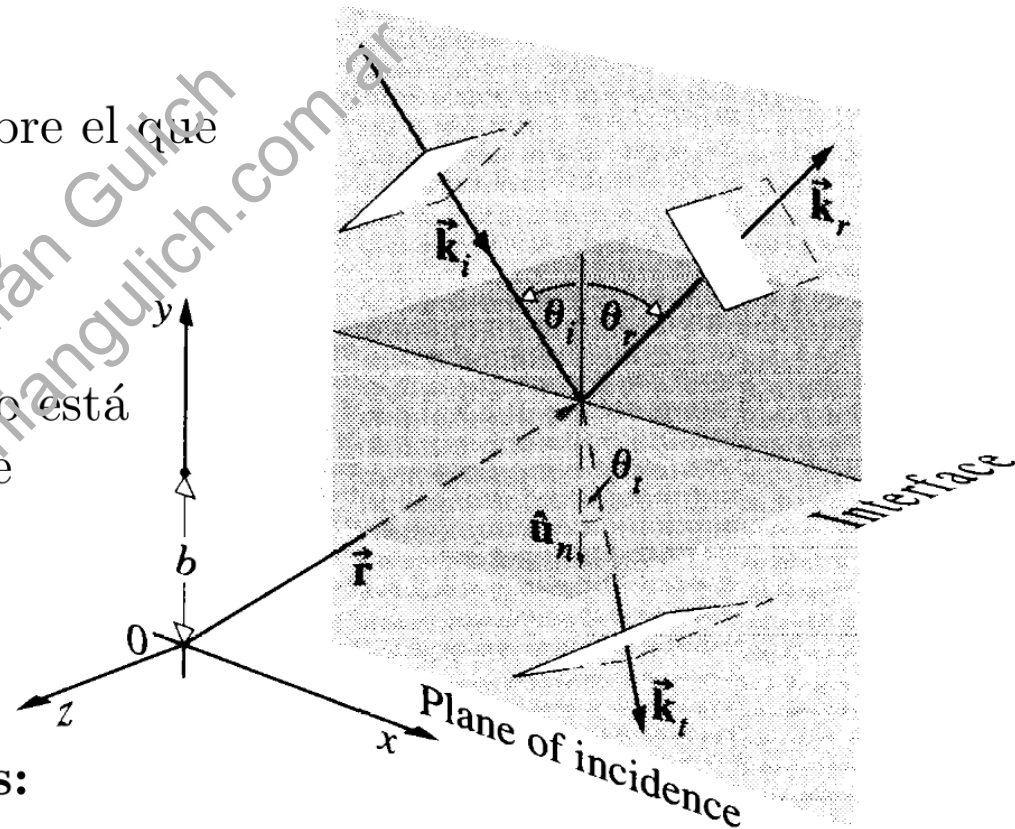
Plano de incidencia

Los rayos incidente (paralelo a $\vec{k}_i$), reflejado (paralelo a $\vec{k}_r$) y transmitido (paralelo a $\vec{k}_t$) están en un mismo plano: el *plano de incidencia*.

Dicho de otra manera:

El plano de incidencia es el plano sobre el que están contenidos $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ y $\vec{k}_t$.

Como $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{k}$ forman una terna ordenada a derecha, basta saber como está orientado $\vec{E}$ para tener perfectamente orientados a los tres vectores.



Hay dos posibilidades principales:

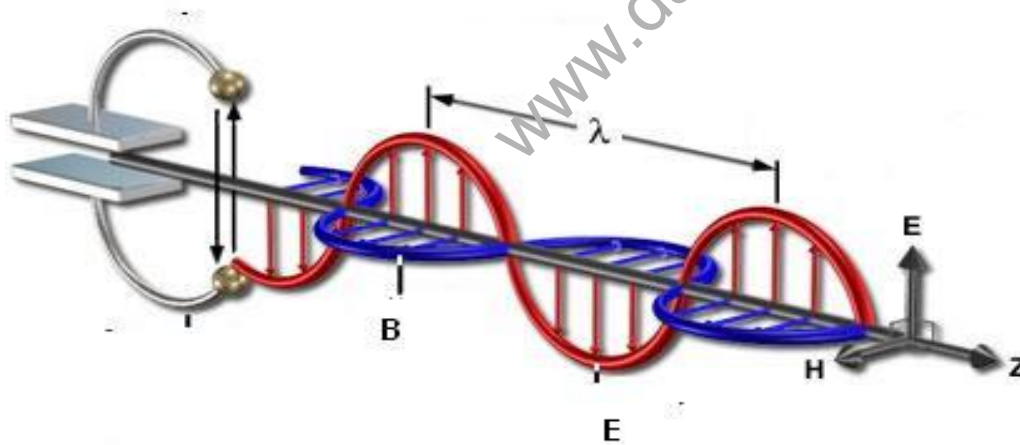
1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia
2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

Polarización lineal de una onda EM

En las ondas transversales la vibración es perpendicular a la dirección de propagación.

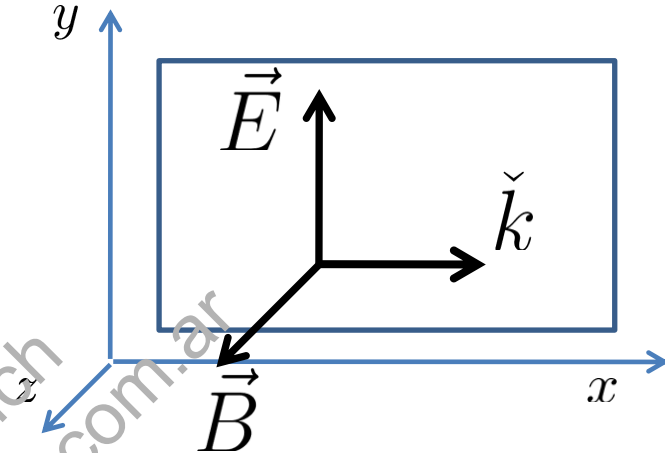
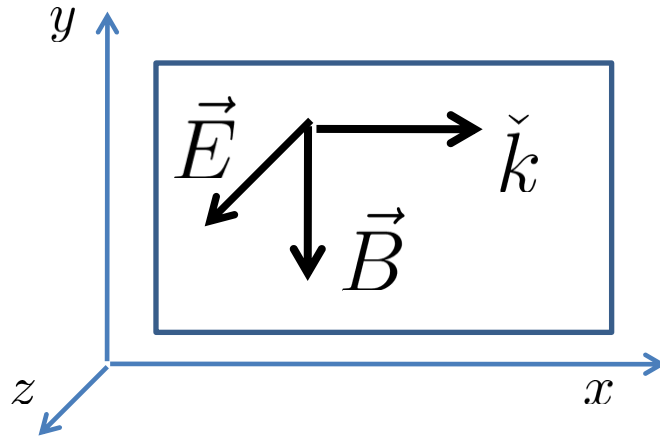
Se define la *dirección de polarización* como la dirección de vibración del campo eléctrico $\vec{E}$.

Vimos anteriormente que en una onda EM plana el campo eléctrico $\vec{E}$ oscilaba siempre en una misma dirección. En ese caso decimos que la onda está *linealmente polarizada*.



- Fuente puntual: Ondas polarizadas (antenas ..)
- Muchas fuentes: Ondas no polarizadas (sol..)

El campo eléctrico respecto del plano de incidencia



1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia
2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

Hay dos posibilidades principales:

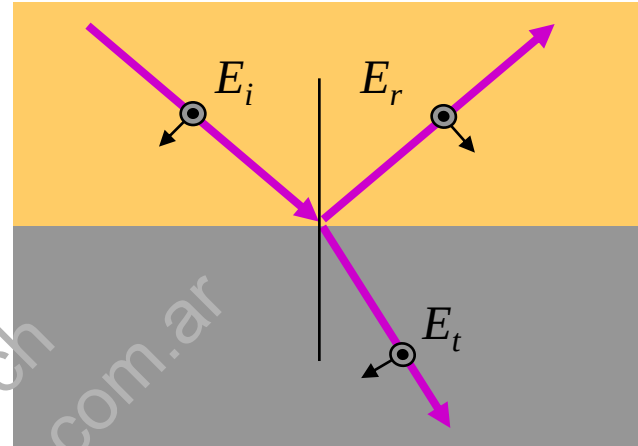
1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia
2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

En general, $\vec{E}$ puede tener cualquier orientación perpendicular a $\vec{k}$, pero siempre lo podremos descomponer en una componente sobre el plano de incidencia y otra perpendicular.

Cualquier estado de polarización puede representarse por dos ondas linealmente polarizadas ortogonales.

Ecuaciones de Fresnel

Queremos calcular la fracción de una onda de luz reflejada (r) y transmitida (t) al pasar ésta por una interfase entre dos medios con diferentes índices de refracción.



Si E_{0i} , E_{0r} y E_{0t} son las amplitudes de los campos.

$$\begin{cases} r_{\perp} = (E_{0r}/E_{0i})_{\perp} \\ t_{\perp} = (E_{0t}/E_{0i})_{\perp} \end{cases}$$

1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia

$$\begin{cases} r_{\parallel} = (E_{0r}/E_{0i})_{\parallel} \\ t_{\parallel} = (E_{0t}/E_{0i})_{\parallel} \end{cases}$$

2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

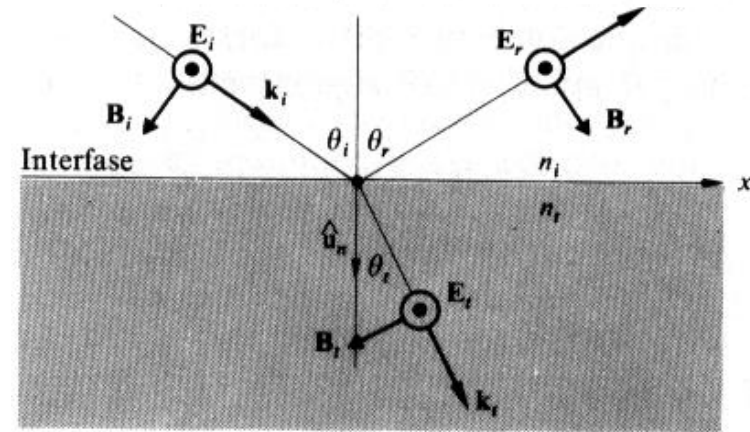
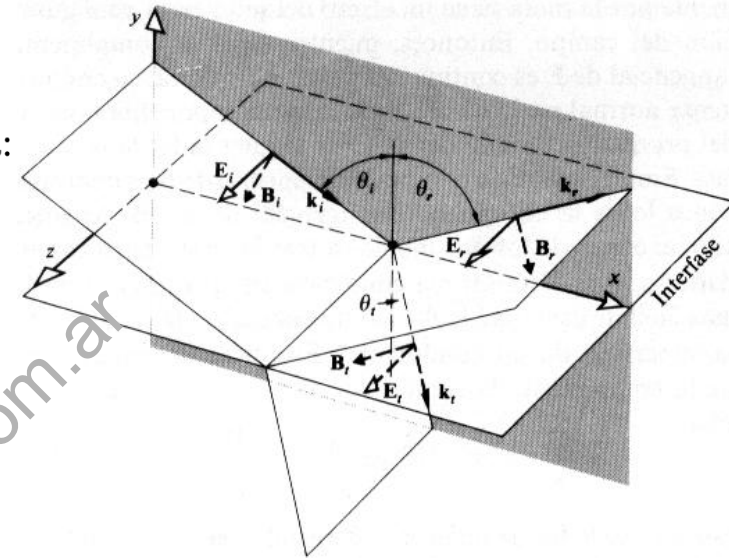
- Consideramos que las condiciones límite en la interfase de los campos eléctricos y magnéticos de las ondas de luz.
- Dependen del ángulo de incidencia de una manera complicada.

Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

Consideramos las amplitudes de las ondas respectivas cuando E es perpendicular (normal) al plano de incidencia:

- $E_i(\vec{r}, t) = E_{0i} \sin(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)$ onda incidente
- $E_r(\vec{r}, t) = E_{0r} \sin(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)$ onda reflejada
- $E_t(\vec{r}, t) = E_{0t} \sin(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)$ onda transmitida

Elegimos la dirección de la onda incidente $E_i(\vec{r}, t)$ y suponemos que las direcciones de $E_r(\vec{r}, t)$ y $E_t(\vec{r}, t)$ son como en la figura.



Condiciones de contorno:

Las condiciones se deben cumplir en cualquier lugar de la interfase y para cualquier tiempo. Por lo tanto debemos considerar:

$$\sin(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) = \sin(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) = \sin(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t) = 1$$

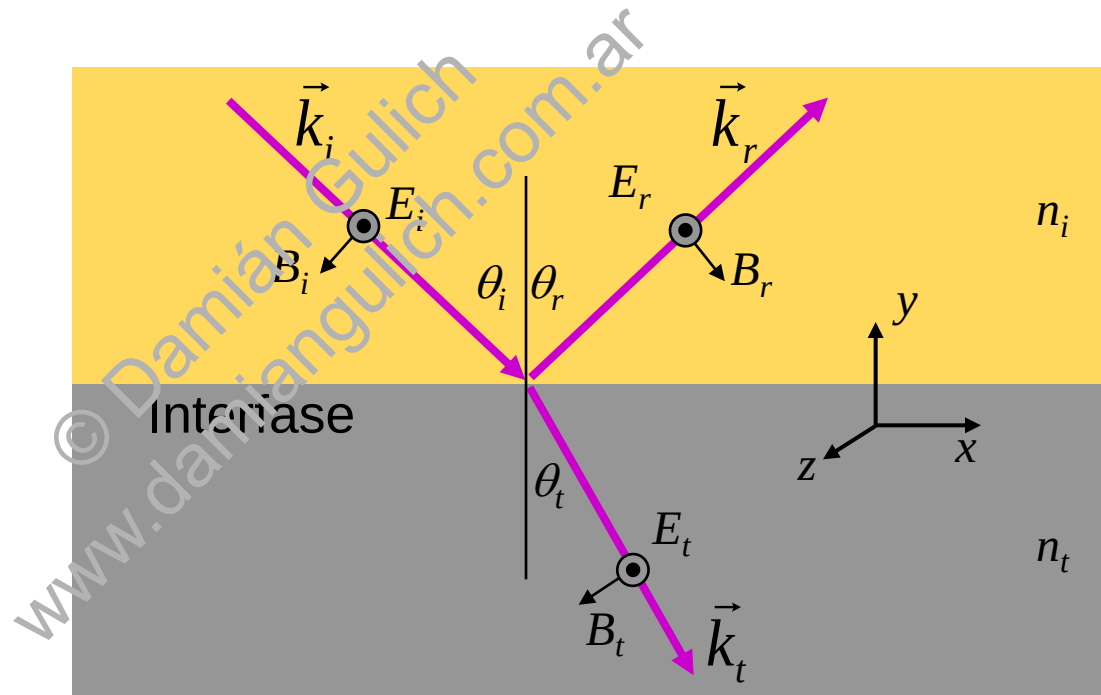
Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

Condición de contorno para el campo eléctrico en una interfase

Las componentes **tangenciales** de $\vec{E}$ se conservan a ambos lados de la interfase. [¡Tangenciales a la interfase!]

El campo total E en el plano de la interfase es continuo.

En nuestro caso, los campos E están en la dirección z , el cual es el plano de la interfase (xz), entonces:



$$E_i(x, y = 0, z, t) + E_r(x, y = 0, z, t) = E_t(x, y = 0, z, t)$$

Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

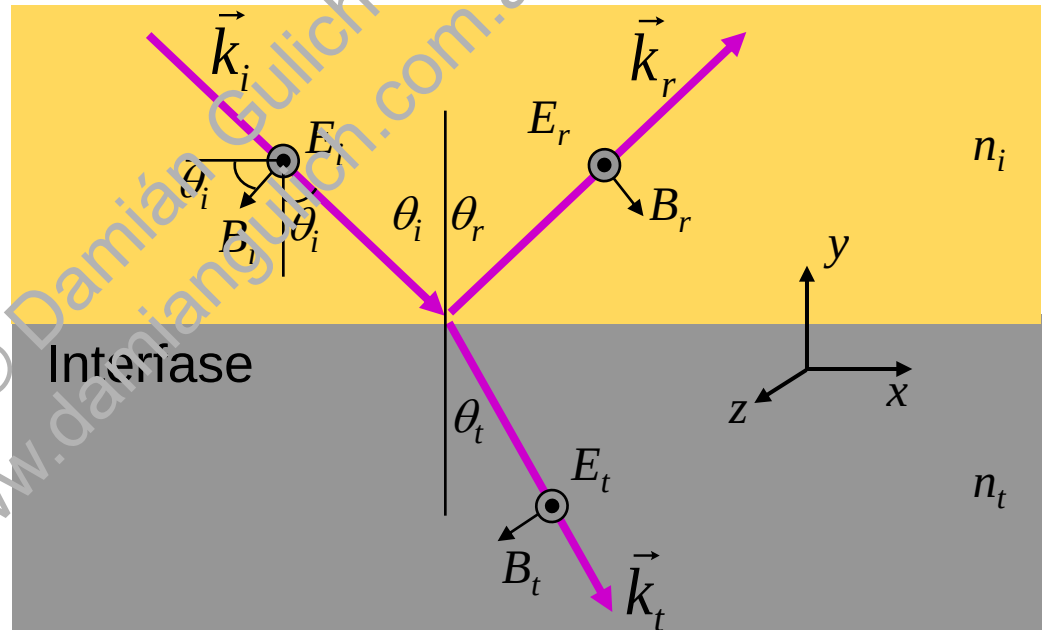
Condición de contorno para el campo magnético en una interfase

Las componentes **tangenciales** de $\vec{B}/\mu$ se conservan a ambos lados de la interfase. [¡Tangenciales a la interfase!]

(Considerando que para dieléctricos en general $\mu_i =, \mu_t = \mu_0$)

El campo total B/μ en el plano de la interfase es continuo.

Aquí, todos los campos B están en el plano xy , de modo que tomamos las componentes x :



$$-B_i(x, y = 0, z, t) \cos(\theta_i) + B_r(x, y = 0, z, t) \cos(\theta_r) = B_t(x, y = 0, z, t) \cos(\theta_t)$$

Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

Reflexión y transmisión para haz polarizado perpendicularmente

Proponemos la cancelación de las partes de variación rápida de la onda lumínica y mantenemos únicamente las amplitudes (en general complejas):

$$(I) \quad E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

$$(II) \quad -B_{0i} \cos(\theta_i) + B_{0r} \cos(\theta_r) = -B_{0t} \cos(\theta_t)$$

Recordando la relación de amplitudes: $B = E/(c/n)$ y Snell: $\theta_i = \theta_r$

$$\Rightarrow n_i (E_{0r} - E_{0i}) \cos(\theta_i) = -n_t E_{0t} \cos(\theta_t)$$

Reemplazando: $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$

$$\Rightarrow n_i (E_{0r} - E_{0i}) \cos(\theta_i) = -n_t (E_{0r} + E_{0i}) \cos(\theta_t)$$

Planteadas las ecuaciones las incógnitas que son E_{0r} y E_{0t} , las expresaremos como los coeficientes definidos y ahora calculamos los coeficientes de reflexión y transmisión.

Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

Reflexión y transmisión para haz polarizado perpendicularmente

Reagrupando $n_i (E_{0r} - E_{0i}) \cos(\theta_i) = -n_t (E_{0r} + E_{0i}) \cos(\theta_t)$

$$\Rightarrow E_{0r} [n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)] = E_{0i} [n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)]$$

Resolviendo E_{0r}/E_{0i} encontramos el *coeficiente de reflexión perpendicular*:

$$r_{\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}$$

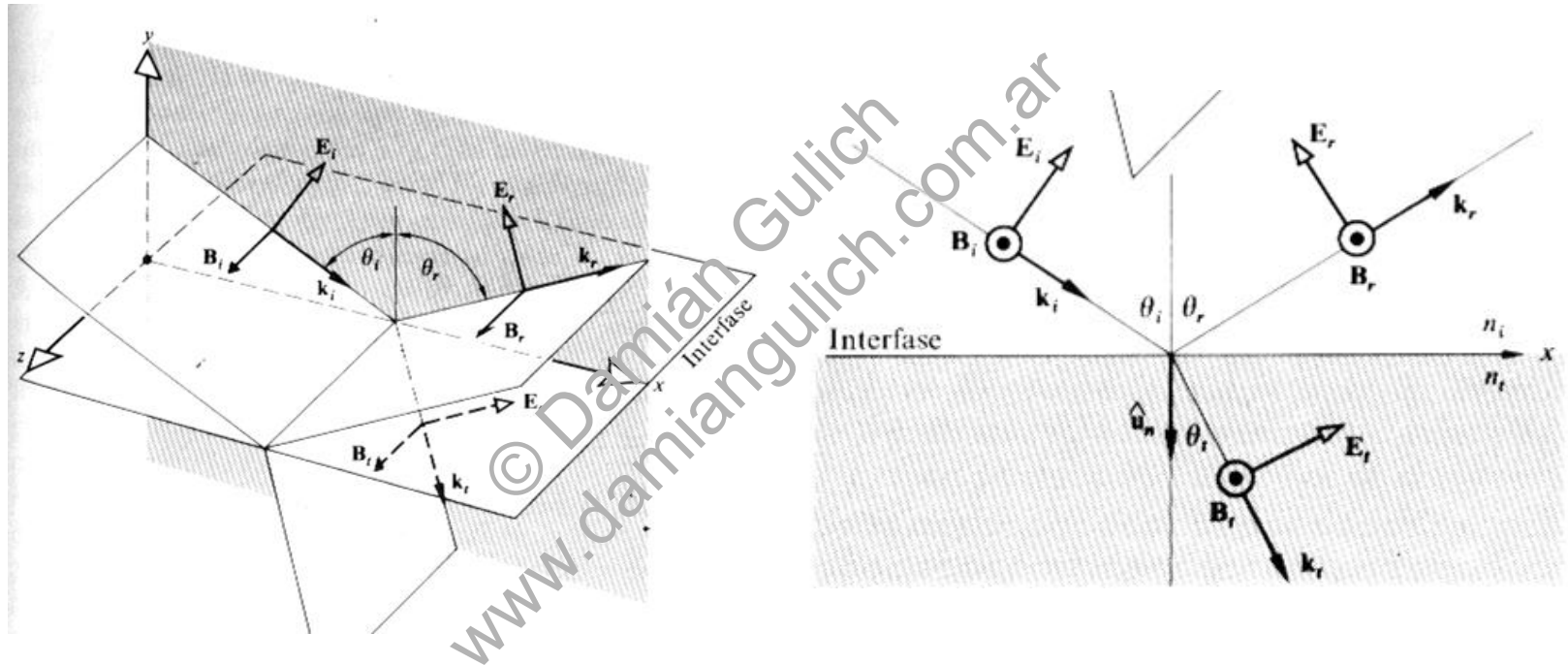
De la ecuación (I) $E_{0t}/E_{0i} = E_{0r}/E_{0i} + 1$ y con ello encontramos el *coeficiente de transmisión perpendicular*:

$$t_{\perp} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}$$

Estas ecuaciones que permiten calcular la relación de amplitudes de la onda reflejada y transmitida respecto de la incidente son las **ecuaciones de Fresnel** para luz polarizada *perpendicularmente* al plano de incidencia

Caso 2. $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia

Igual que en el caso 1, elegimos la dirección de la onda incidente $E_i(\vec{r}, t)$ y suponemos que las direcciones de $E_r(\vec{r}, t)$ y $E_t(\vec{r}, t)$ son como en la nueva figura.



Condiciones de contorno:

Igual que en el caso 1, las condiciones se deben cumplir en cualquier lugar de la interfase y para cualquier tiempo. Por lo tanto debemos considerar:

$$\sin(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) = \sin(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) = \sin(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t) = 1$$

Caso 2. $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia

Reflexión y transmisión para haz polarizado paralelamente

De la misma forma queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para la configuración de E paralelo se obtiene

$$r_{\parallel} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos(\theta_i) - n_i \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}$$

$$t_{\parallel} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2 n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}$$

Estas ecuaciones que permiten calcular la relación de amplitudes de la onda reflejada y transmitida respecto de la incidente son las **ecuaciones de Fresnel** para luz polarizada *paralelamente* al plano de incidencia

Ecuaciones de Fresnel simplificadas para dieléctricos

Usando la Ley de Snell se puede hacer una simplificación en las Ecuaciones de Fresnel válida para medios dieléctricos.

Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

Caso 2. $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia

$$r_{\parallel} = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

Notar que los signos de los coeficientes de Fresnel son válidos para la elección particular de las direcciones de los vectores.

Ejemplo: el signo negativo del coeficiente $r_{\perp}$ es porque es incorrecta la dirección del vector $\vec{E}$ reflejado.

Los coeficientes de amplitud de Fresnel cuando la incidencia es cuasinormal

Si la incidencia es cuasinormal $\theta_i \approx 0 \implies \sin(\theta_i) \approx \tan(\theta_i) \approx \theta_i$ (¡en radianes!).
Ahora hacemos las aproximaciones en los coeficientes de Fresnel y luego de aplicar Snell hallamos:

$$-r_{\perp}(\theta_i \approx 0) = r_{\parallel}(\theta_i \approx 0) = \frac{n_t \cos(\theta_i) - n_i \cos(\theta_t)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)}$$

$$t_{\perp}(\theta_i \approx 0) = t_{\parallel}(\theta_i \approx 0) = \frac{2 n_i}{n_i + n_t}$$

Ejemplo: si $n_i = 1$ (aire) y $n_t = 1,5$ (vidrio) y $\theta_i = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -r_{\perp}(\theta_i = 0) = r_{\parallel}(\theta_i = 0) = 0,2 \\ t_{\perp}(\theta_i = 0) = t_{\parallel}(\theta_i = 0) = 0,8 \end{array} \right.$$

¡CUIDADO! Se puede demostrar que

- $t_{\perp} + (-r_{\perp}) = 1$ para todo θ_i
- $t_{\parallel} + (-r_{\parallel}) = 1$ sólo si $\theta_i = 0$

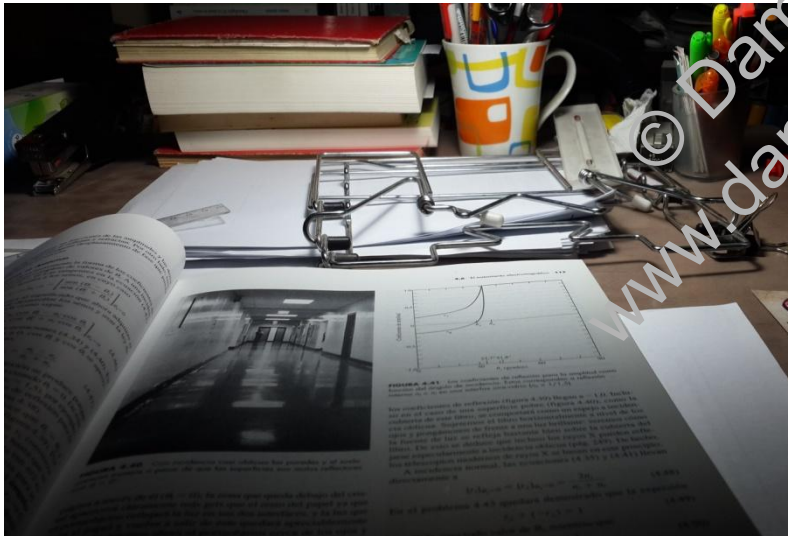
Los coeficientes de amplitud de Fresnel cuando la incidencia es rasante

Si $n_i < n_t$ y si la incidencia es rasante $\theta_i \approx 90^\circ \equiv \pi/2$:

$$-r_{\perp}(\theta_i \approx \pi/2) = -r_{\parallel}(\theta_i \approx \pi/2) = 1$$

$$t_{\perp}(\theta_i \approx \pi/2) = t_{\parallel}(\theta_i \approx \pi/2) = 0$$

¡Los dieléctricos se comportan como espejos cuando los rayos inciden rasantes!



Ejemplo: el papel del libro es mate visto desde arriba, pero funciona como un espejo para los rayos de luz que inciden a casi 90° de la normal.

Los coeficientes de amplitud de Fresnel en función del ángulo incidente ($n_i < n_t$)

Si $n_i < n_t$ se cumple que

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} < 0 \text{ para todo } \theta_i$$

pero

$$r_{\parallel} = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \text{ es}$$

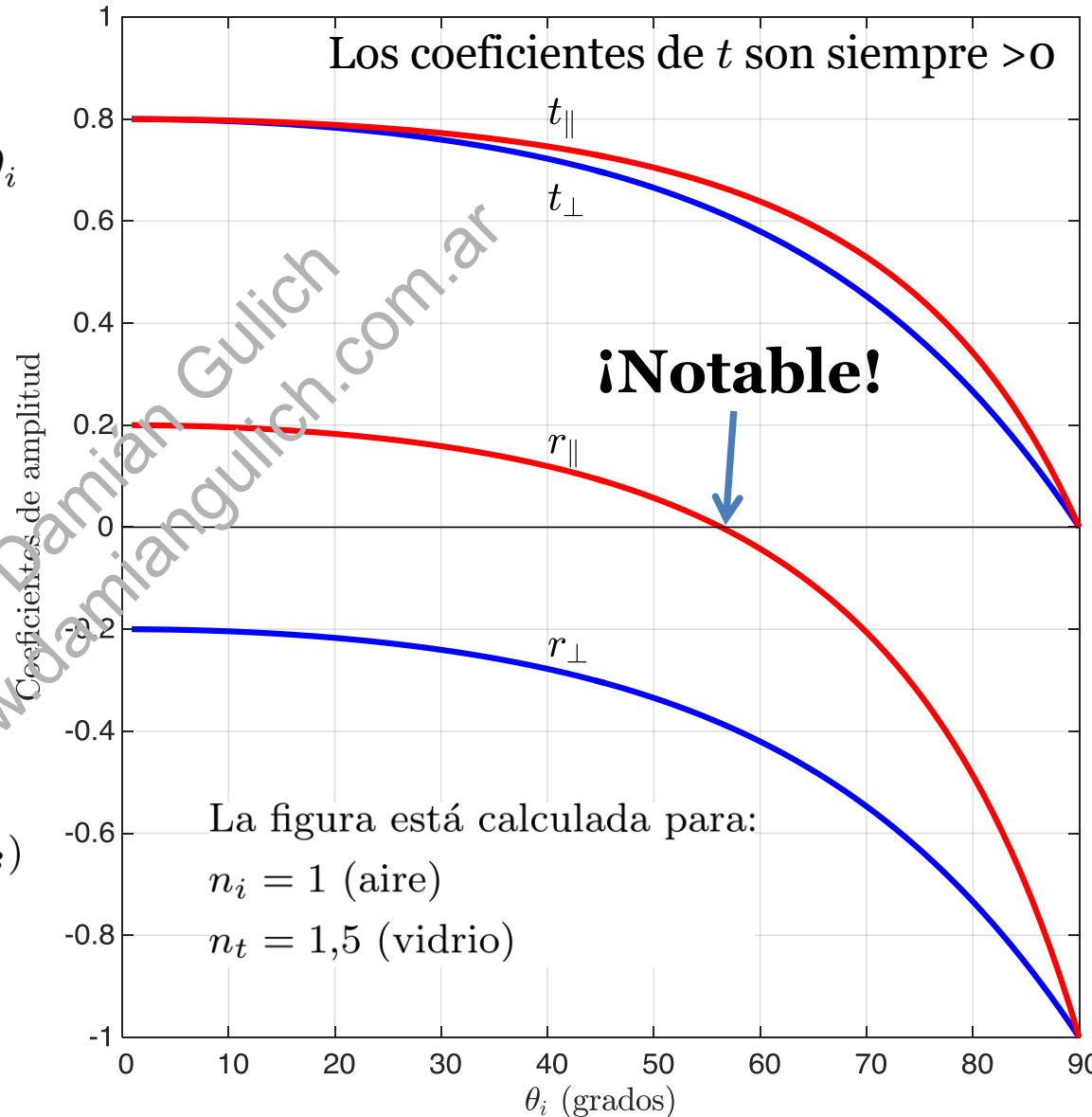
> 0 para $\theta_i = 0$ y decrece

$= 0$ para $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \equiv 90^\circ$

< 0 para θ_i mayores

El ángulo de incidencia para el cual se cumple que $r_{\parallel} = 0$ se llama *ángulo de polarización* ($\theta_i = \theta_p = \theta_B$) o *ángulo de Brewster*.

La luz reflejada a θ_B está SÓLO polarizada **perpendicularmente** al plano de incidencia.



Los coeficientes de amplitud de Fresnel en función del ángulo incidente ($n_i > n_t$)

Si $n_i > n_t$ se cumple que

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} > 0 \text{ para todo } \theta_i$$

pero

$$r_{\parallel} = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \text{ es}$$

< 0 para $\theta_i = 0$ y crece

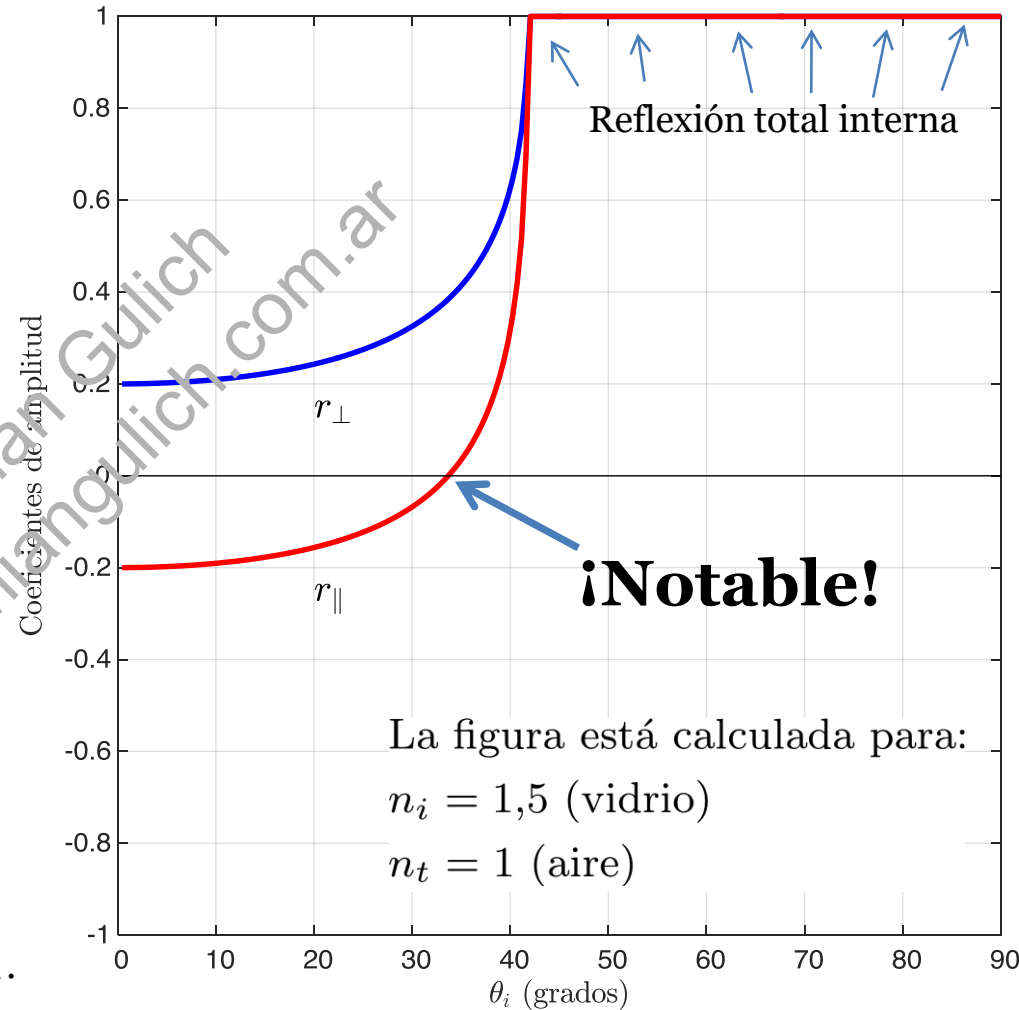
$= 0$ para $\theta_i = \theta'_B$

> 0 para $\theta_i > \theta'_B$

Además hay reflexión total interna para

$$\theta_i = \theta_c = \sin^{-1}(n_t/n_i)$$

*Para $\theta_i > \theta_c$ decimos que $r_{\perp}$ y $r_{\parallel}$ son 1.



Para los coeficientes de transmisión
siguen valiendo las ecuaciones anteriores.

Ley de Brewster

Cuando $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \equiv 90^\circ$ la luz reflejada a $\theta_i = \theta_B$ está SÓLO polarizada **perpendicularmente** al plano de incidencia ($r_{\parallel} = 0$). Por Ley de Snell sabemos que $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$:

$$\Rightarrow \underline{n_i \sin(\theta_i)} = n_t \sin(\theta_t) = n_t \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = \underline{n_t \cos(\theta_i)}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta_B) = \frac{n_t}{n_i}$$

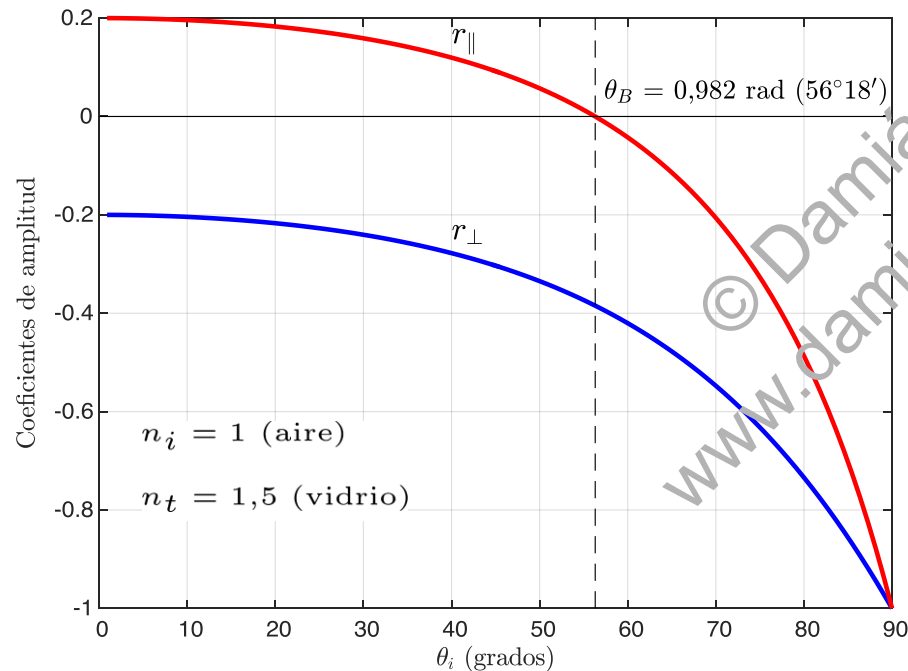
Los dos casos para incidencia aire/vidrio, vidrio/aire

Aire $\rightarrow$ vidrio ($n_i < n_t$):

$n_i = 1$ (aire)

$n_t = 1,5$ (vidrio)

$\Rightarrow \theta_B \simeq 0,982 \text{ rad} \equiv 56^\circ 18'$

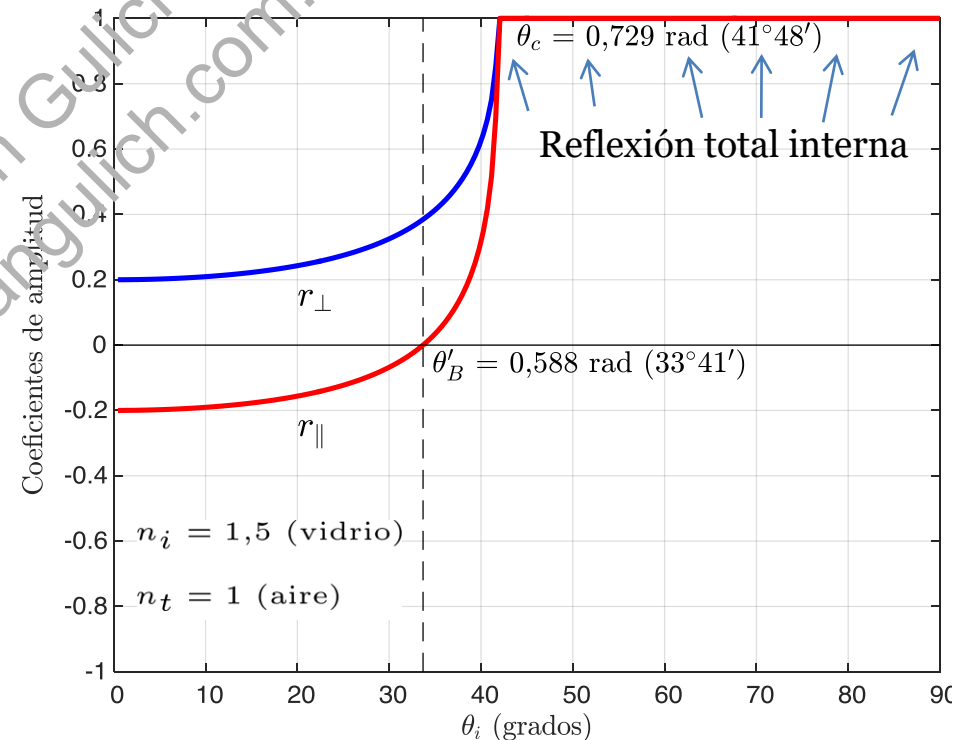


Vidrio $\rightarrow$ aire ($n_i > n_t$):

$n_i = 1,5$ (vidrio)

$n_t = 1$ (aire)

$\Rightarrow \theta'_B \simeq 0,588 \text{ rad} \equiv 33^\circ 41'$



Es posible demostrar que los ángulos de polarización para los dos casos son complementarios:

$$\theta_B + \theta'_B = \frac{\pi}{2}$$

Reflectancia y transmitancia

© Damían Gulich
www.damiangulich.com.ar

Reflectancia y transmitancia

En lugar de los cocientes de las amplitudes de campos (coeficientes de Fresnel para la reflexión y la transmisión) se considera el cociente entre la potencia (IA') que llega a una interfase y la que se refleja o transmite respectivamente:

R Reflectancia

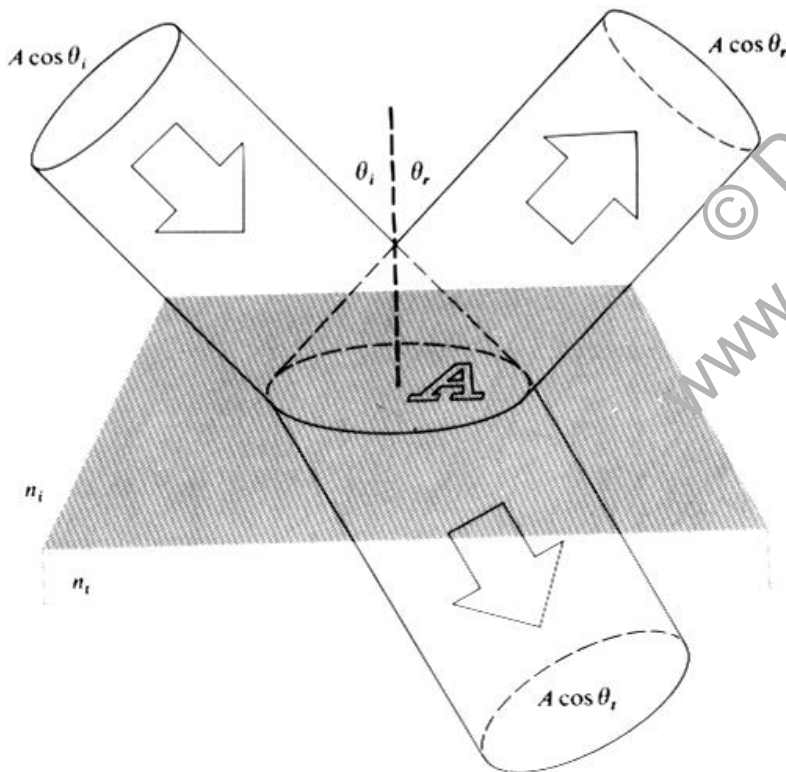
T Transmitancia

Es posible demostrar que $R + T = 1$

Reflectancia y transmitancia

Recordemos el vector de Poynting es la potencia por unidad de área que atraviesa una superficie cuya normal es paralela a él. En el vacío:

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad I = \langle \|\vec{S}\| \rangle = \langle \|\vec{c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}}\| \rangle = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2$$



Sean

- I_i la intensidad incidente,
- I_r la intensidad reflejada,
- I_t la intensidad transmitida
- A una cierta área sobre la interfase

$A \cos(\theta_j)$ es el área transversal en la dirección de θ_j

Reflectancia y transmitancia

$$(I_i)_{\parallel,\perp} = \frac{v_i \varepsilon_i}{2} (E_{0i}^2)_{\parallel,\perp} \quad (I_r)_{\parallel,\perp} = \frac{v_i \varepsilon_i}{2} (E_{0r}^2)_{\parallel,\perp} \quad \mu_i = \mu_t = \mu_0$$

Diagram illustrating the geometry of reflection and refraction at an interface. The incident ray has area $A \cos \theta_i$, the reflected ray has area $A \cos \theta_r$, and the refracted ray has area $A \cos \theta_t$. The interface area is A . The media are characterized by $(n_i, \varepsilon_i, \mu_0, v_i)$ and $(n_t, \varepsilon_t, \mu_0, v_t)$.

$$(I_t)_{\parallel,\perp} = \frac{v_t \varepsilon_t}{2} (E_{0t}^2)_{\parallel,\perp}$$

$$\left\{ \begin{aligned} (R)_{\parallel,\perp} &= \frac{(I_r)_{\parallel,\perp} A \cos(\theta_r = \theta_i)}{(I_i)_{\parallel,\perp} A \cos(\theta_i)} = \frac{(I_r)_{\parallel,\perp}}{(I_i)_{\parallel,\perp}} \\ (T)_{\parallel,\perp} &= \frac{(I_t)_{\parallel,\perp} A \cos(\theta_t)}{(I_i)_{\parallel,\perp} A \cos(\theta_i)} = \frac{(I_t)_{\parallel,\perp} \cos(\theta_t)}{(I_i)_{\parallel,\perp} \cos(\theta_i)} \end{aligned} \right.$$

$$(R)_{\parallel,\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel,\perp}^2 = r_{\parallel,\perp}^2$$

$$(T)_{\parallel,\perp} = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel,\perp}^2 = \left(\frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} \right) t_{\parallel,\perp}^2$$

Se puede probar que por conservación de la energía $(R)_{\parallel,\perp} + (T)_{\parallel,\perp} = 1$

Reflectancia y transmitancia cuando la incidencia es normal

Recordemos los coeficientes de Fresnel cuando $\theta_i = \theta_t = 0$ (incidencia normal)

$$-r_{\perp}(\theta_i = 0) = r_{\parallel}(\theta_i = 0) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \quad t_{\perp}(\theta_i = 0) = t_{\parallel}(\theta_i = 0) = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

$$(R)_{\parallel, \perp} = r_{\parallel, \perp}^2 = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$$

$$(T)_{\parallel, \perp} = \left(\frac{n_t}{n_i} \right)^2 t_{\parallel, \perp}^2 = \frac{4n_i n_t}{(n_i + n_t)^2}$$

Ejemplo: si $n_i = 1$ (aire) y $n_t = 1,5$ (vidrio) y $\theta_i = 0$:

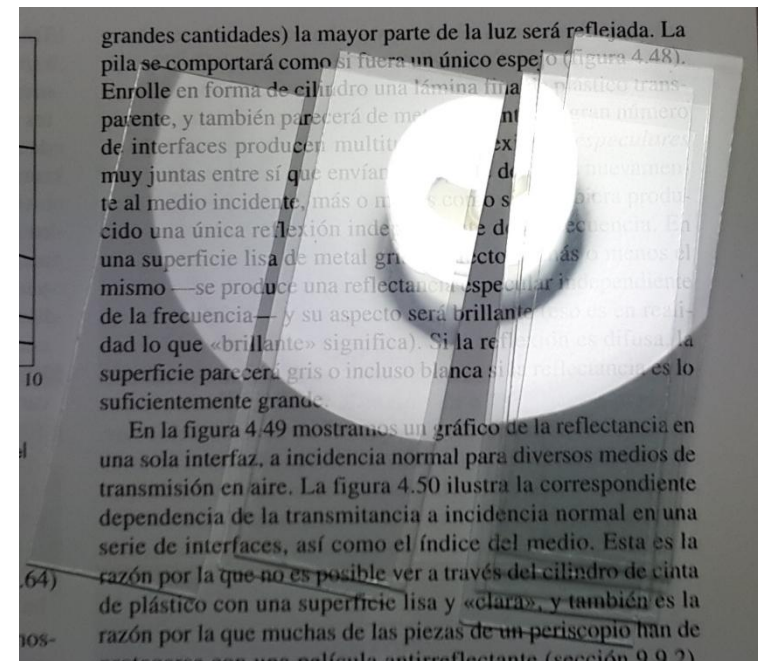
$$(R)_{\parallel, \perp} = 0,04 \equiv 4\%$$

$$(T)_{\parallel, \perp} = 0,96 \equiv 96\%$$

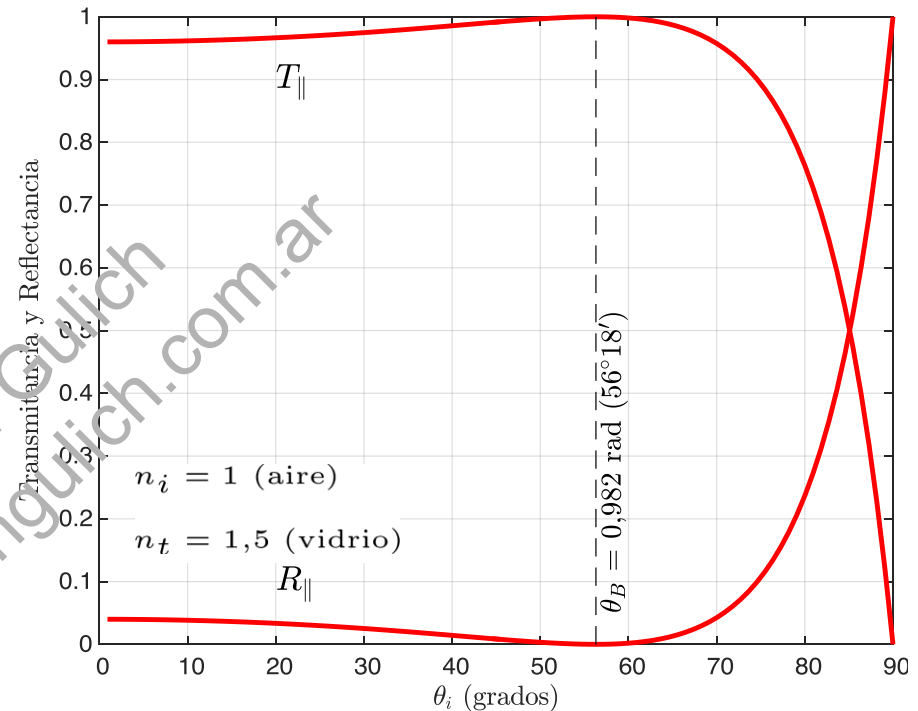
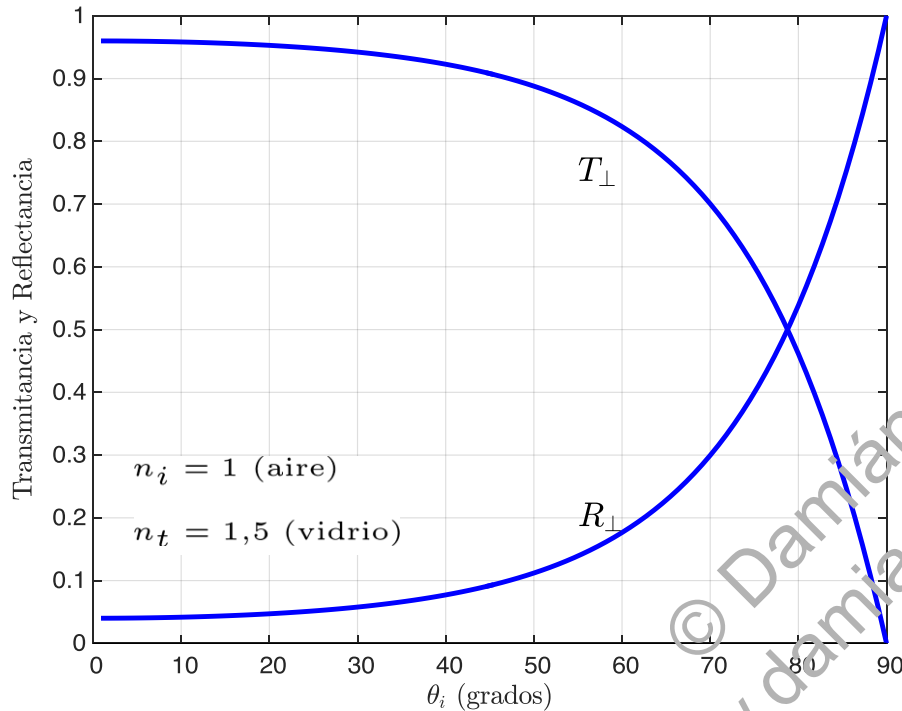
Estos valores son los mismos cualquiera sea la dirección en que viaje la luz.

Este 4% tiene gran importancia en el caso de muchas interfases aire/vidrio, por ejemplo el sistema de lentes en una cámara fotográfica.

En la foto mostramos pilas de distintos cantidades de portaobjetos directamente bajo una lámpara.



Reflectancia y transmitancia en función del ángulo para incidencia externa ($n_i < n_t$)



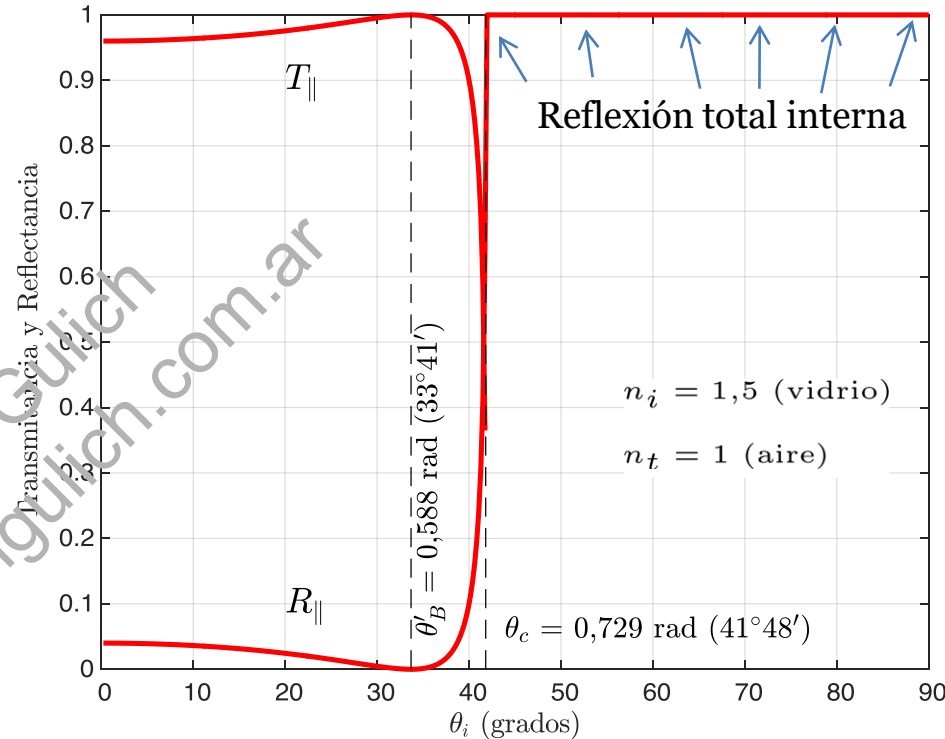
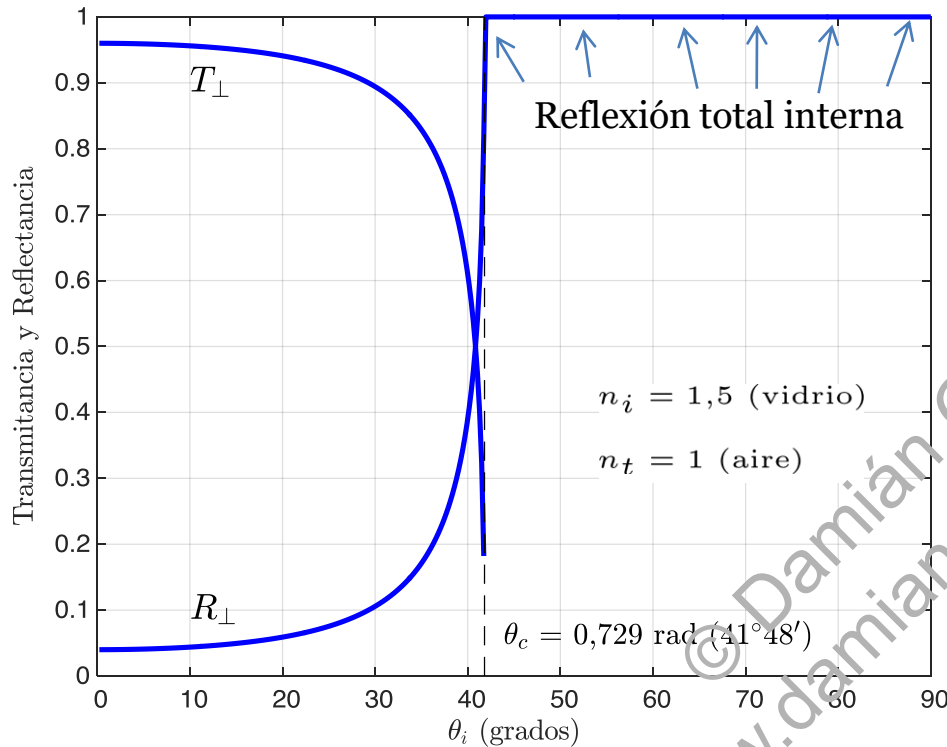
Nótese que $(R)_{\parallel}$ tienden a 1 cuando $\theta_i \simeq \pi/2$.

La interfase dieléctrica se comporta como un espejo para incidencia rasante como ya vimos.

Se cumple el teorema de conservación de la energía: energía incidente debe ser igual a la suma de las energías reflejada y la transmitida.

$$(R)_{\parallel,\perp} + (T)_{\parallel,\perp} = 1$$

Reflectancia y transmitancia en función del ángulo para incidencia interna ($n_i > n_t$)



Nótese que $(R)_{\parallel} = 1$ cuando $\theta_i > \theta_c$.

La interfase dieléctrica se comporta como un espejo para incidencia en esos ángulos como ya vimos.

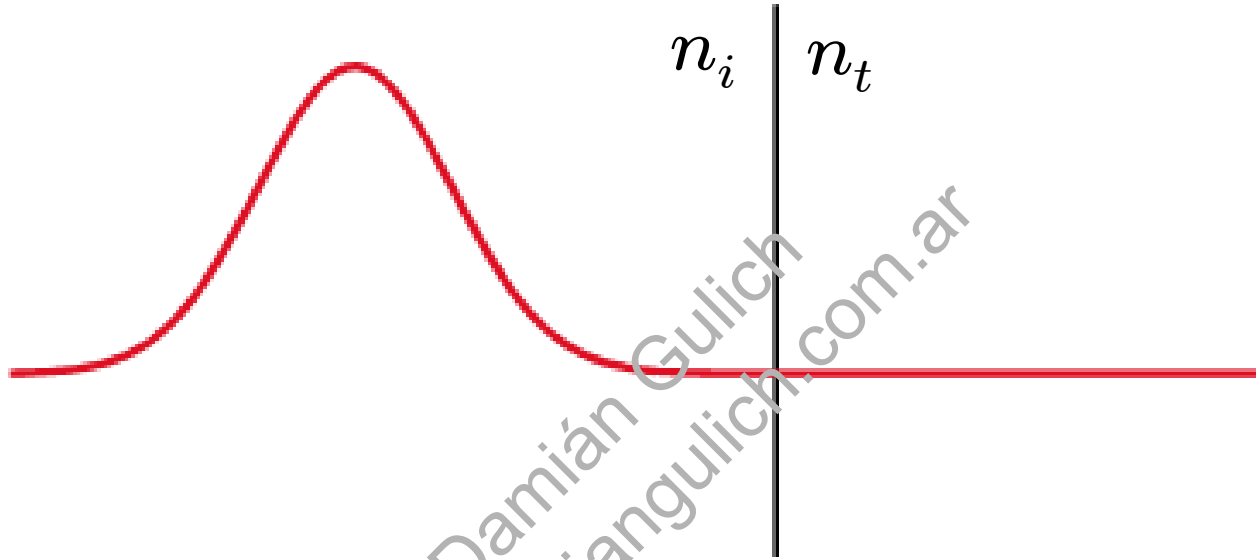
$$(R)_{\parallel, \perp} + (T)_{\parallel, \perp} = 1$$

Se cumple el teorema de conservación de la energía: energía incidente debe ser igual a la suma de las energías reflejada y la transmitida.

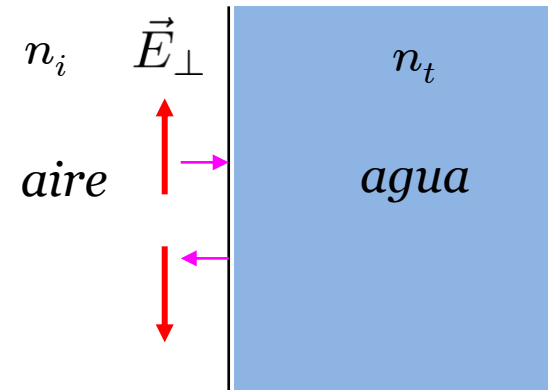
El cambio de fase

© Damían Gulich
www.damiangulich.com.ar

El comportamiento de una onda al pasar por una interfase ($n_i < n_t$)



Onda reflejada esta desfazada en 180 grados cuando $n_1 < n_2$



Análisis de la fase reflejada de $E_{\perp}$ con los coeficientes de Fresnel para incidencia externa ($n_i < n_t$)

$E_{\perp}$ es la amplitud del campo perpendicular al plano de incidencia.

$$r_{\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} < 0 \quad \forall \theta_i$$

Que $r_{\perp} < 0$ siempre implica que $(\vec{E}_{0r})_{\perp}$ apunta *al revés* que $(\vec{E}_{0i})_{\perp}$.

Esto significa que hay una

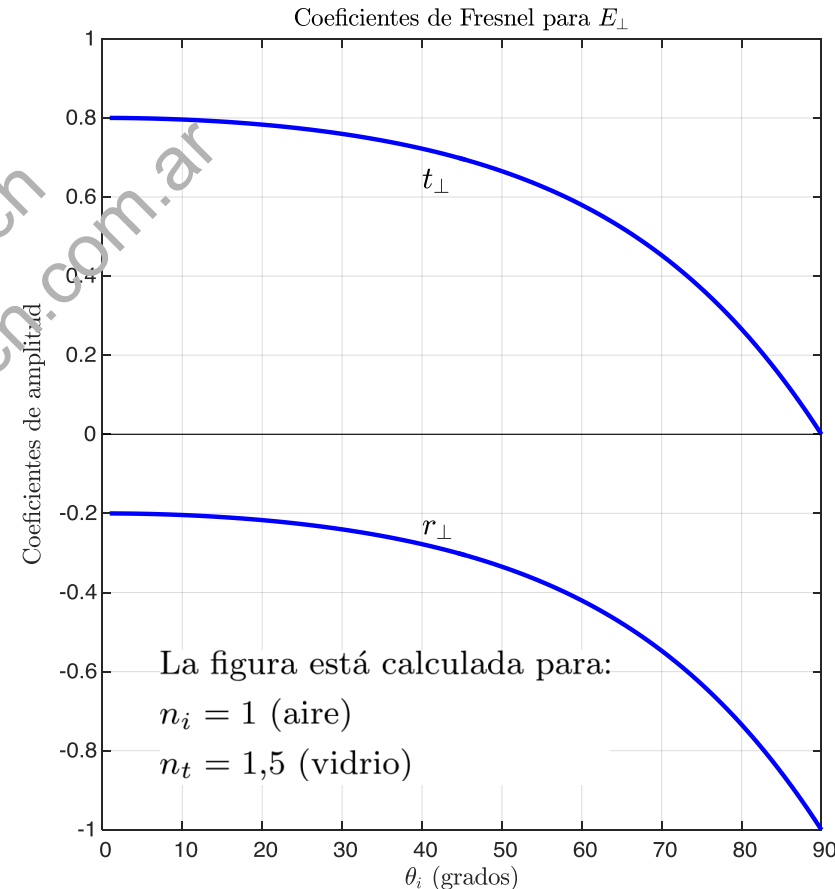
inversión de fase $\Delta\phi = \pi$ (rad) para la amplitud $(E_{0r})_{\perp}$ respecto de $(E_{0i})_{\perp}$.

$$t_{\perp} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} > 0 \quad \forall \theta_i$$

Que $t_{\perp} > 0$ siempre implica que $(\vec{E}_{0t})_{\perp}$ apunta *igual* que $(\vec{E}_{0i})_{\perp}$.

Esto significa que $(E_{0t})_{\perp}$ **está en fase** con la amplitud de $(E_{0i})_{\perp}$ ($\Delta\phi = 0$).

La componente del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia sufre un cambio de fase de π rad (180°) cuando $n_i < n_t$.



Análisis de la fase reflejada de $E_{\perp}$ con los coeficientes de Fresnel para incidencia interna ($n_i > n_t$)

$E_{\perp}$ es la amplitud del campo perpendicular al plano de incidencia.

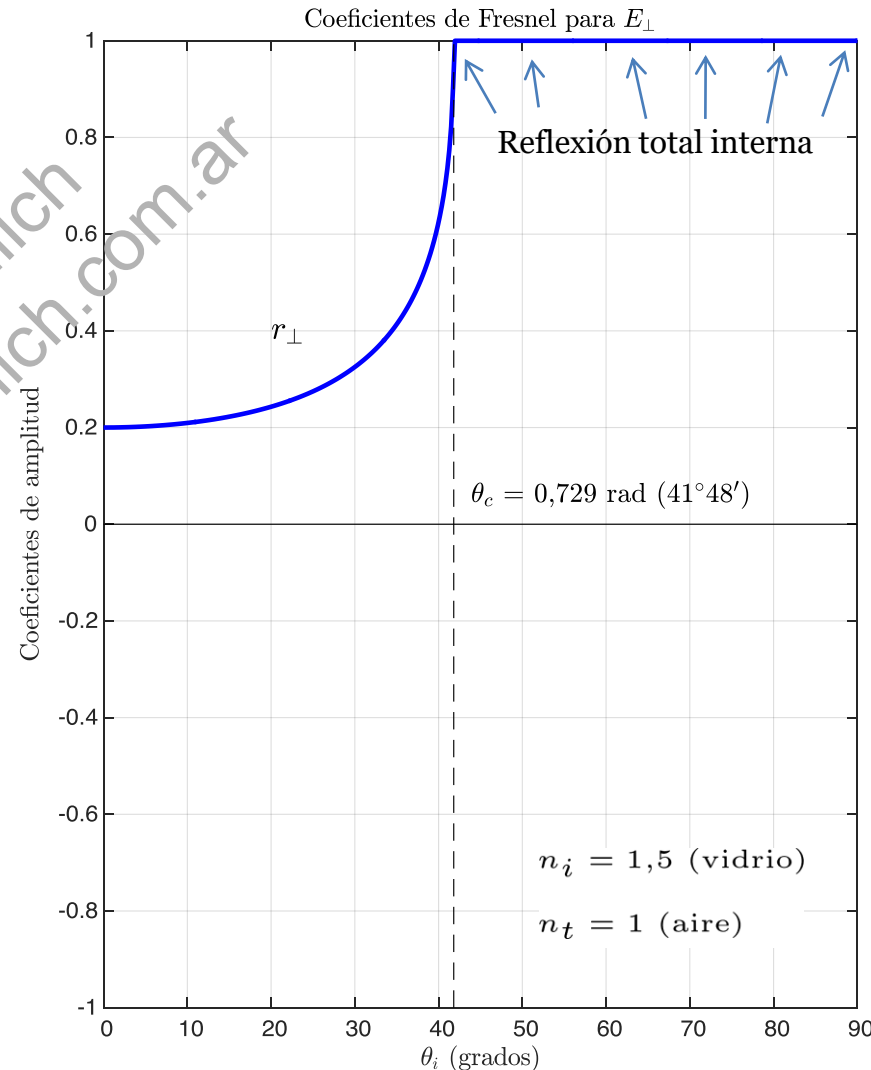
$$r_{\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} > 0 \quad \forall \theta_i$$

Nótese que $t_{\perp} = 1 \quad \forall \theta_i > \theta_c$ siempre, implica que $(\vec{E}_{0t})_{\perp}$ apunta *igual* que $(\vec{E}_{0i})_{\perp}$. Esto significa que en ese rango $(E_{0t})_{\perp}$ **está en fase** con la amplitud de $(E_{0i})_{\perp}$ ($\Delta\phi = 0$).

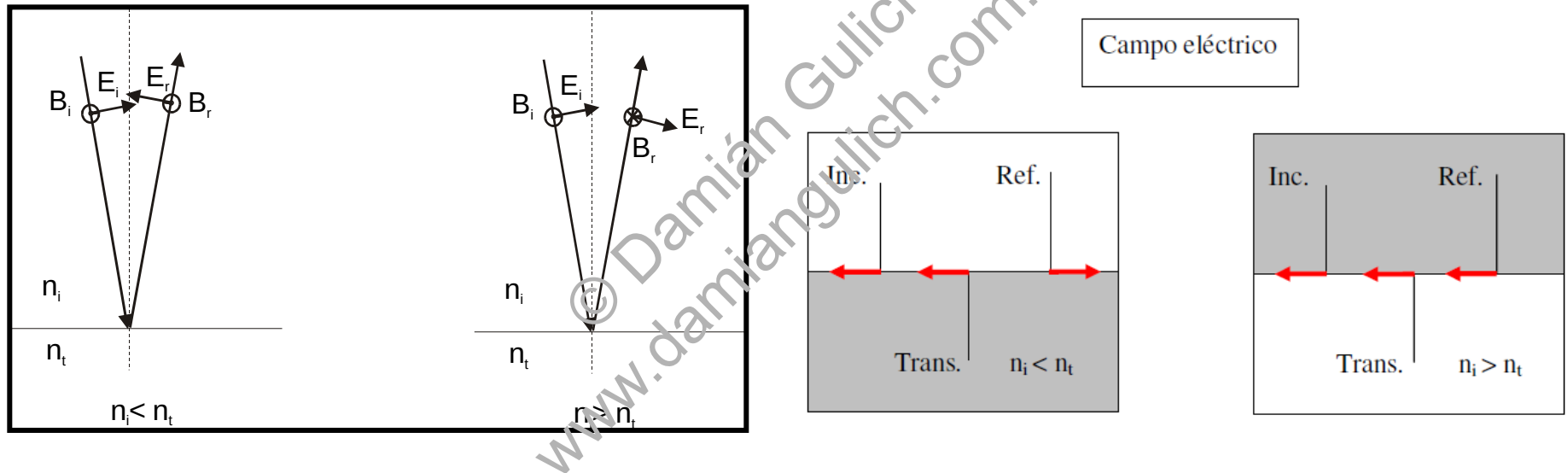
$$t_{\perp} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} > 0 \quad \forall \theta_i$$

Que $t_{\perp} > 0$ siempre implica que $(\vec{E}_{0t})_{\perp}$ apunta *igual* que $(\vec{E}_{0i})_{\perp}$. Esto significa que $(E_{0t})_{\perp}$ **está en fase** con la amplitud de $(E_{0i})_{\perp}$ ($\Delta\phi = 0$).

Tarea: trazar la curva de $t_{\perp}$.
¿Tienen sentido esos valores?



En resumen, **la componente del campo eléctrico normal al plano de incidencia** sufre un corrimiento de fase de π radianes bajo reflexión cuando el medio incidente tiene un índice menor que el medio transmisor



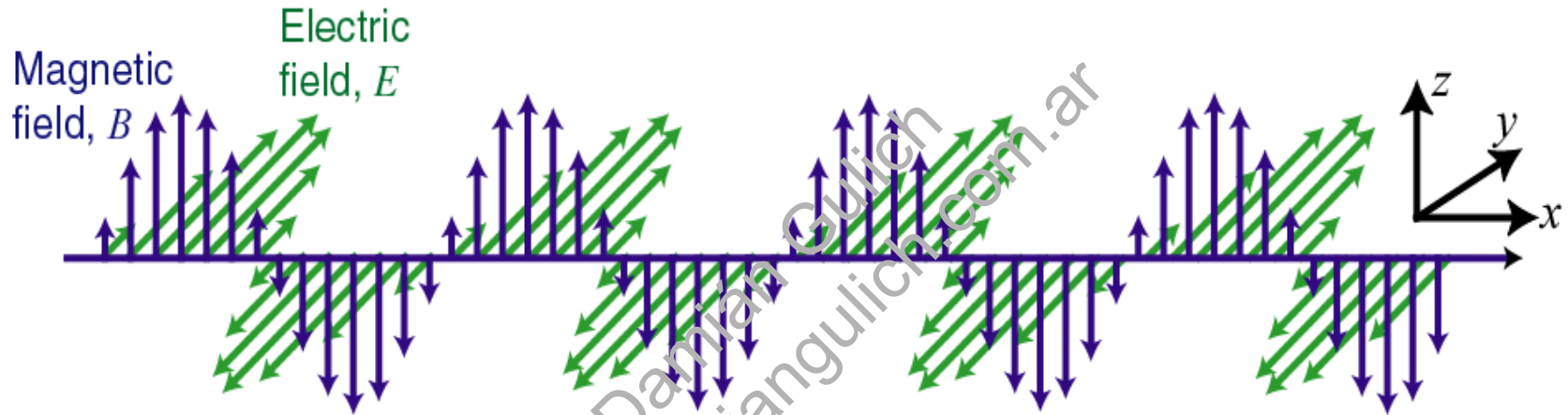
Cuando un par de campos eléctricos están el fase sus campos magnéticos asociados también lo están

Polarización

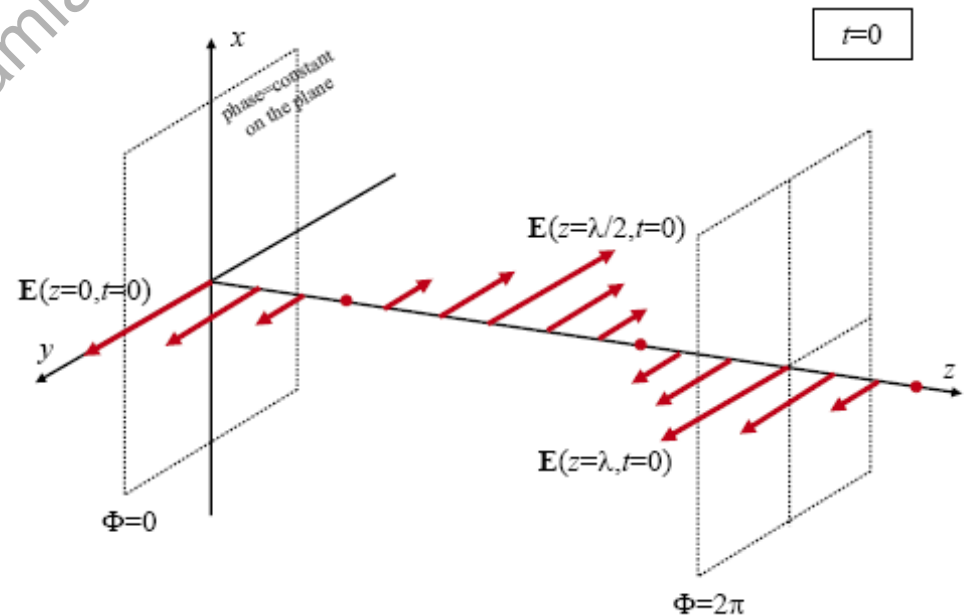
© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Polarización de una onda electromagnética

La luz es una onda electromagnética. Como hemos visto, las ondas EM son transversales, con los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ perpendiculares y $\vec{E} \times \vec{B}$ coincide con la dirección de propagación.



La polarización esta relacionada con la dirección de oscilación del campo eléctrico.





Advertencia trigonométrica

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Descripción general del campo $\vec{E}$

Describamos una onda plana que se propaga en la dirección $+z$ ($\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$).
Describiremos $\vec{E}(z, t)$ ya que ya vimos que $\vec{B}$ queda totalmente determinada.
Si la propagación es según $+z$, en general $\vec{E}$ puede tener componentes sobre x e y :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

donde:

$$\begin{cases} \vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \vec{j} \end{cases}$$

Cada componente cumple con la Ecuación de Onda.

ϵ es la diferencia de fase entre las componentes.

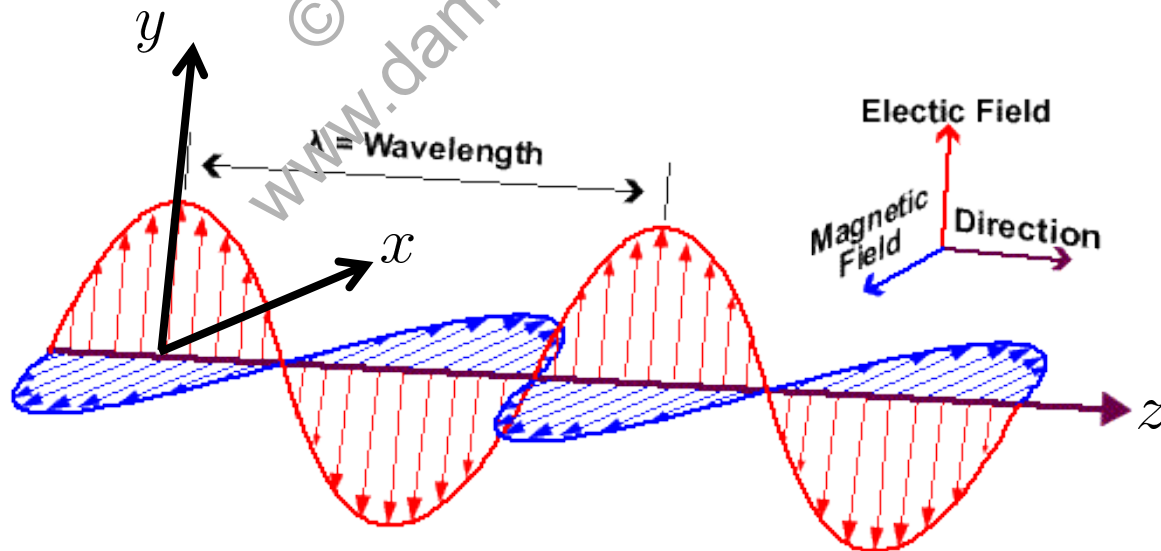
Tomamos como referencia a $\vec{E}_x$ y modificaremos la fase relativa de $\vec{E}_y$.

Luz linealmente polarizada

El caso más sencillo es si la amplitud en la dirección x es cero ($E_{ox} = 0$), queda únicamente la componente en la dirección y (vertical). En este caso decimos que la onda está *linealmente polarizada*.

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_x(z, t) = 0 \text{ } \check{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \text{ } \check{j} \end{array} \right.$



Luz linealmente polarizada (I)

Si la diferencia de fase es $\epsilon = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$):

$$\Rightarrow \cos(kz - \omega t + \epsilon) = \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

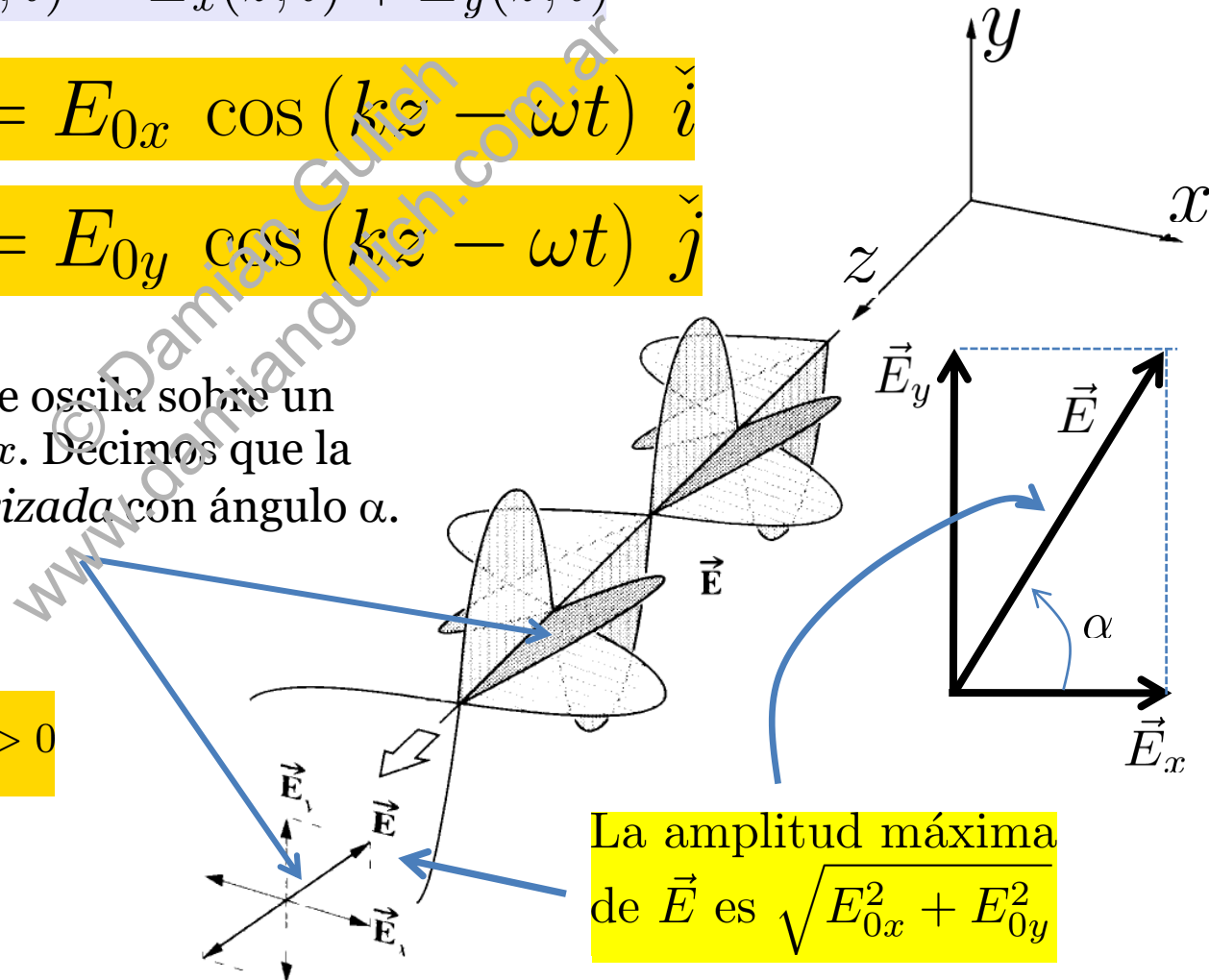
donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t) \vec{j} \end{array} \right.$

El campo eléctrico resultante oscila sobre un plano a un ángulo α del eje x . Decimos que la onda está *linealmente polarizada* con ángulo α .

$$\tan(\alpha) = \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)}$$

$$= \frac{E_{0y} \cos(\dots)}{E_{0x} \cos(\dots)} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} > 0$$

$$\Rightarrow \alpha > 0$$



Luz linealmente polarizada (II)

Si la diferencia de fase es $\epsilon = \pm(2m + 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$):

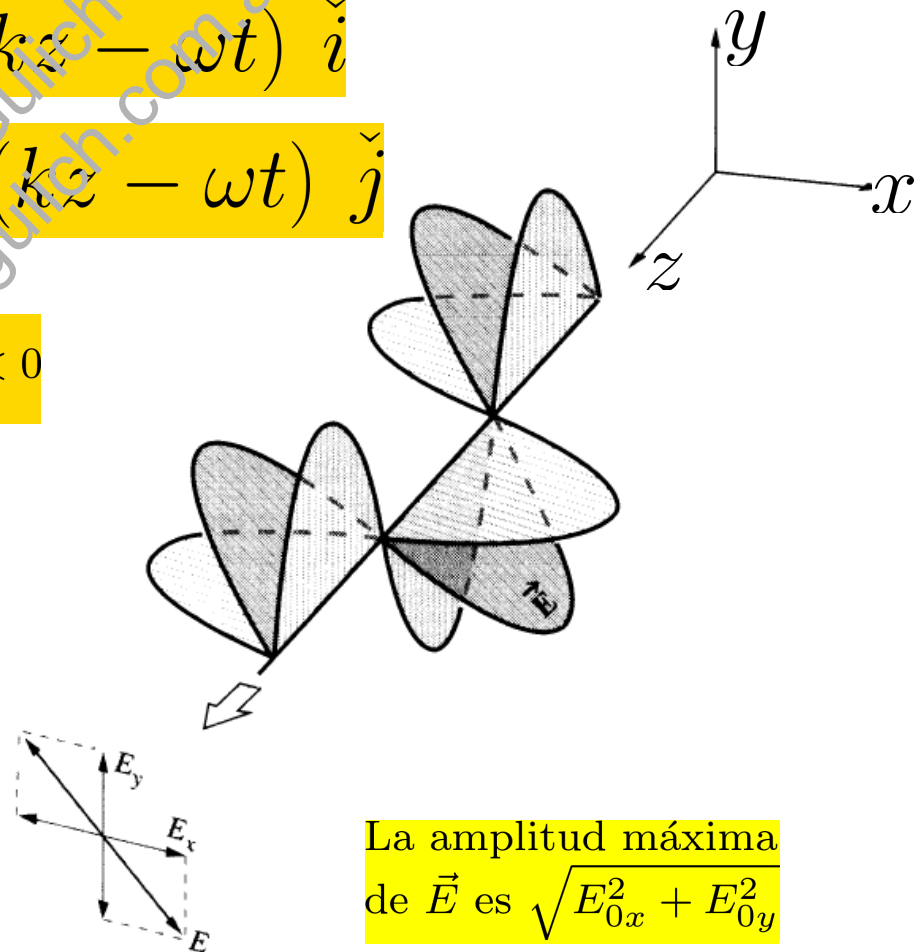
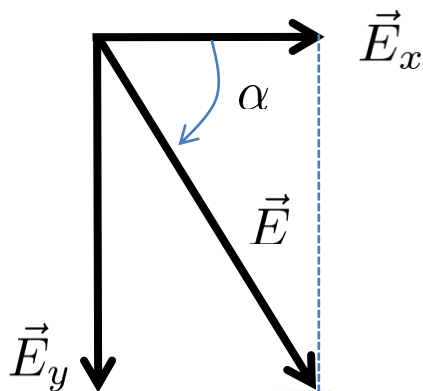
$$\Rightarrow \cos(kz - \omega t + \epsilon) = -\cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \check{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = -E_{0y} \cos(kz - \omega t) \check{j} \end{array} \right.$

$$\tan(\alpha) = \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \frac{-E_{0y} \cos(\dots)}{E_{0x} \cos(\dots)} = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} < 0$$

$$\Rightarrow \alpha < 0$$



La amplitud máxima de $\vec{E}$ es $\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$

Polarización circular (a derecha)

Si las amplitudes son iguales ($E_{0x} = E_{0y} = E_0$) y la diferencia de fase es $\epsilon = (\pm 2m - \frac{1}{2})\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$):

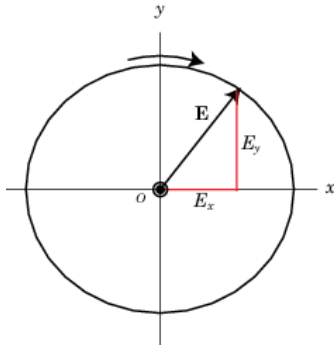
$$\Rightarrow \cos(kz - \omega t + \epsilon) = \sin(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

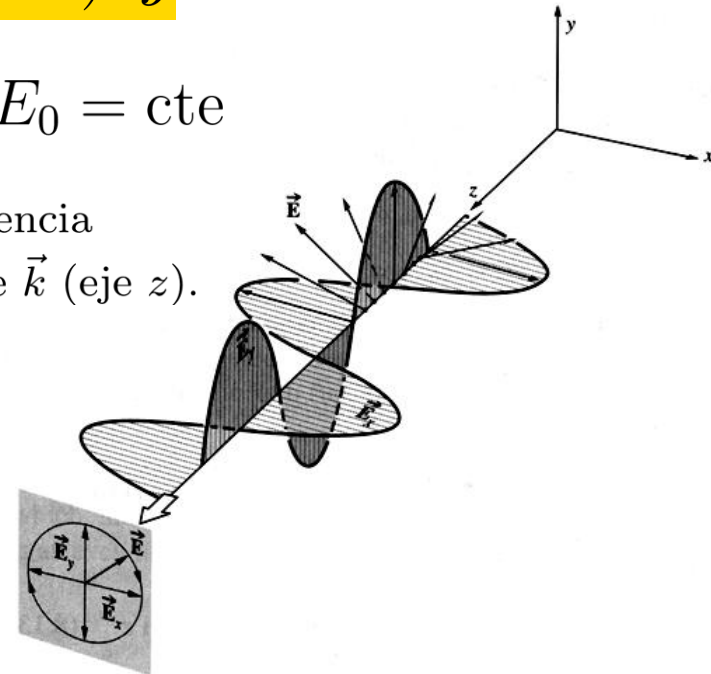
donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{j} \end{array} \right.$

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{[E_0 \cos(\dots)]^2 + [E_0 \sin(\dots)]^2} = E_0 = \text{cte}$$

El campo resultante $\vec{E}(z, t)$ **gira** describiendo una circunferencia de radio E_0 con velocidad angular ω a derecha alrededor de $\vec{k}$ (eje z).



Como el giro visto desde z es hacia la derecha, se dice que la polarización es *circular a derecha*.



Polarización circular (a izquierda)

Si las amplitudes son iguales ($E_{0x} = E_{0y} = E_0$) y la diferencia de fase es $\epsilon = (\pm 2m + \frac{1}{2})\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$):

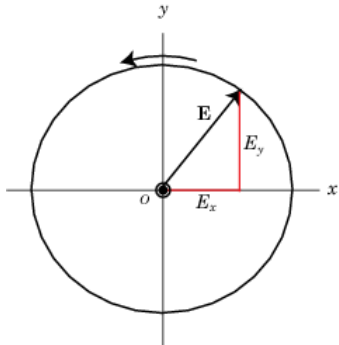
$$\Rightarrow \cos(kz - \omega t + \epsilon) = -\text{sen}(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

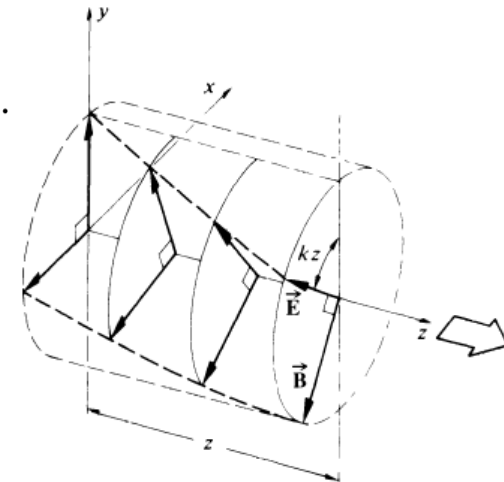
donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = -E_0 \text{sen}(kz - \omega t) \vec{j} \end{array} \right.$

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{[E_0 \cos(\dots)]^2 + [-E_0 \text{sen}(\dots)]^2} = E_0 = \text{cte}$$

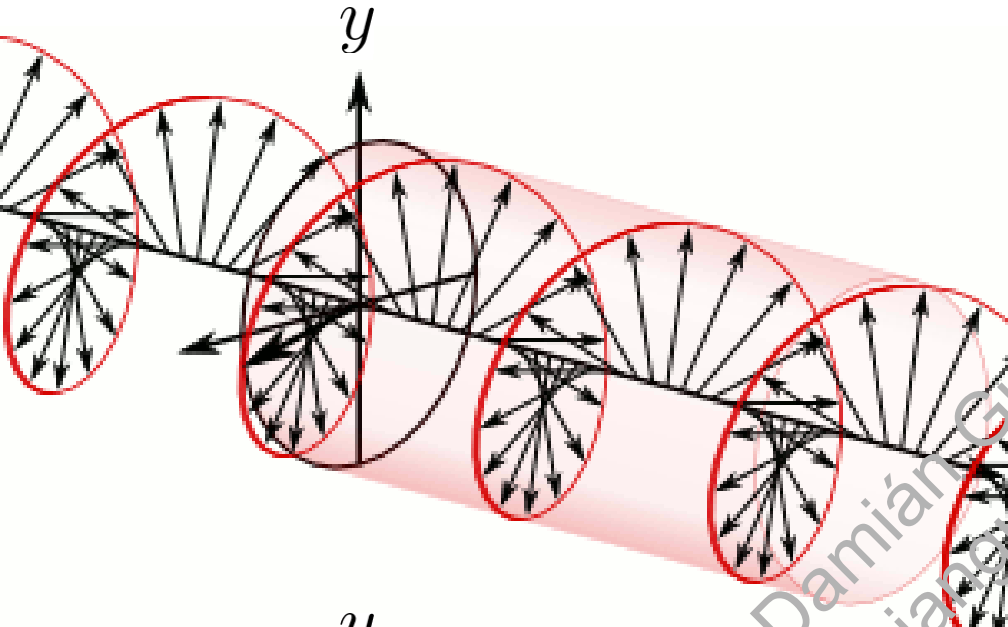
El campo resultante $\vec{E}(z, t)$ **gira** describiendo una circunferencia de radio E_0 con velocidad angular ω a izquierda alrededor de $\vec{k}$ (eje z).



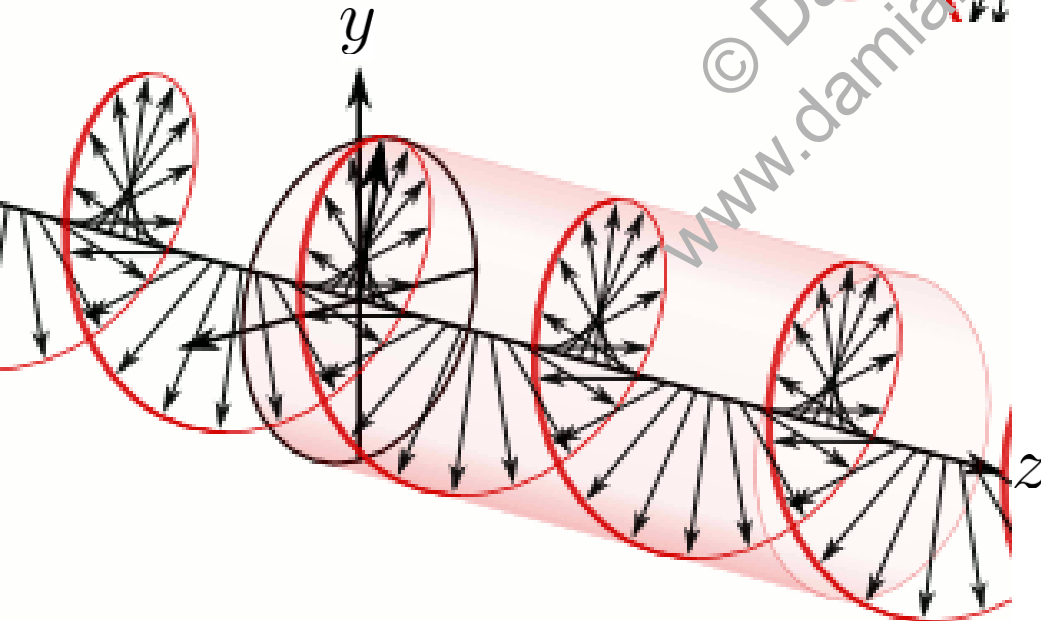
Como el giro visto desde z es hacia la izquierda, se dice que la polarización es *circular a izquierda*.



Polarización circular (ambos casos)



Polarización circular
a izquierda



Polarización circular
a derecha

Polarización elíptica sobre los ejes (a derecha)

Si las amplitudes son distintas ($E_{0x} \neq E_{0y}$) y la diferencia de fase es $\epsilon = (\pm 2m - \frac{1}{2})\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$):

$$\Rightarrow \cos(kz - \omega t + \epsilon) = \sin(kz - \omega t)$$

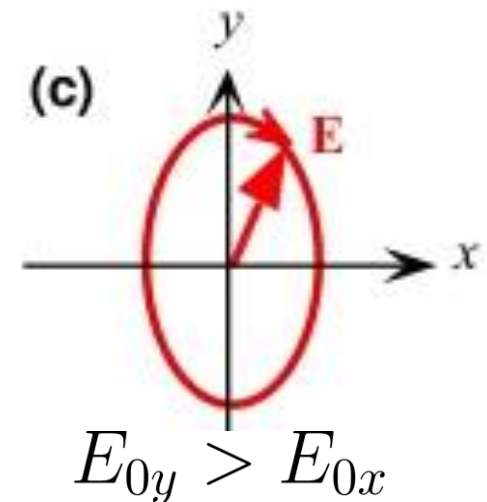
$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \sin(kz - \omega t) \vec{j} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 1 \quad \begin{array}{l} \text{Ecuación de una elipse} \\ \text{sobre los ejes} \\ \text{cartesianos} \end{array}$$

El campo resultante $\vec{E}(z, t)$ **gira** describiendo una **elipse** sobre los ejes, con semiejes E_{0x} y E_{0y} .

Nótese que la polarización circular es un caso especial de la elíptica.



Polarización elíptica general (a derecha)

Si las amplitudes son distintas ($E_{0x} \neq E_{0y}$) y la diferencia de fase es $\epsilon \neq 0, \pi/2, \pi$ (o múltiplos enteros de esos valores):

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

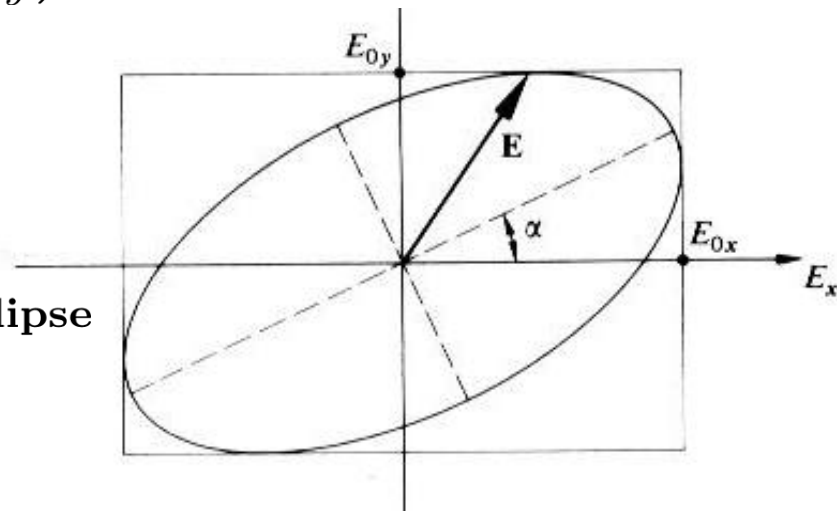
donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \check{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \check{j} \end{array} \right.$

Se puede demostrar que estos campos cumplen la ecuación de una elipse rotada

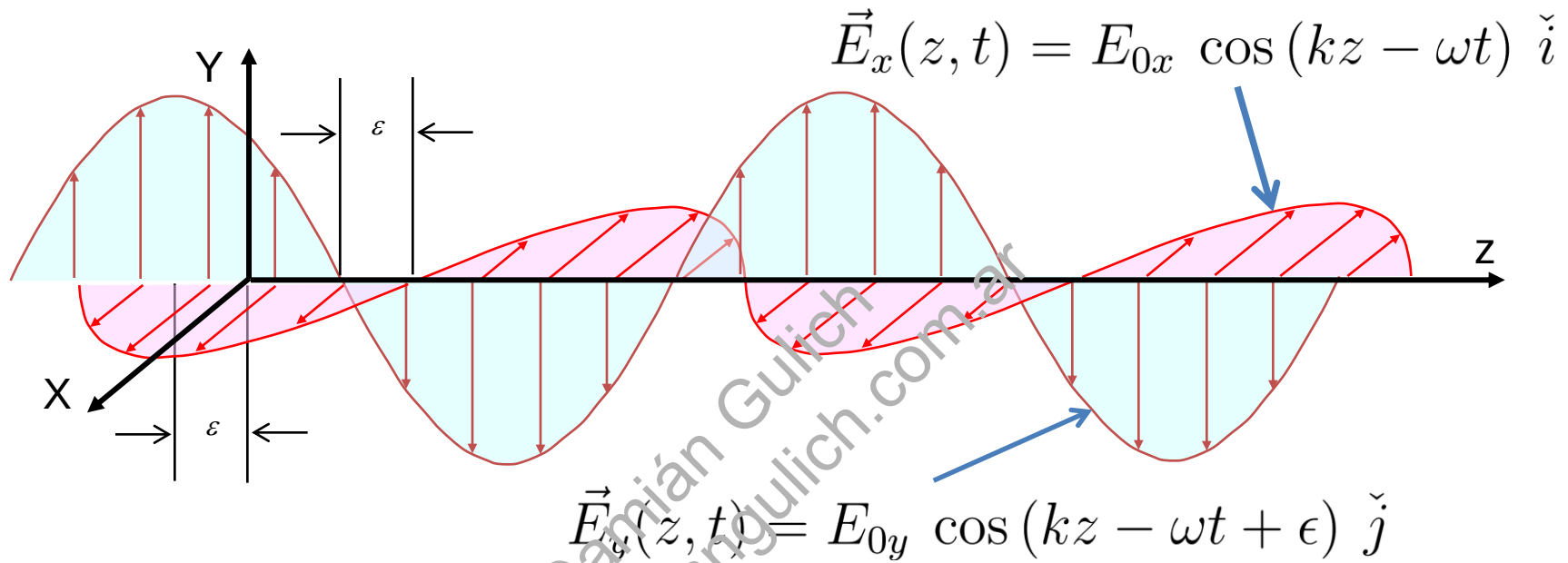
$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right) \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \cos(\epsilon) = \sin^2(\epsilon)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 E_{0x} E_{0y} \cos(\epsilon)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$$

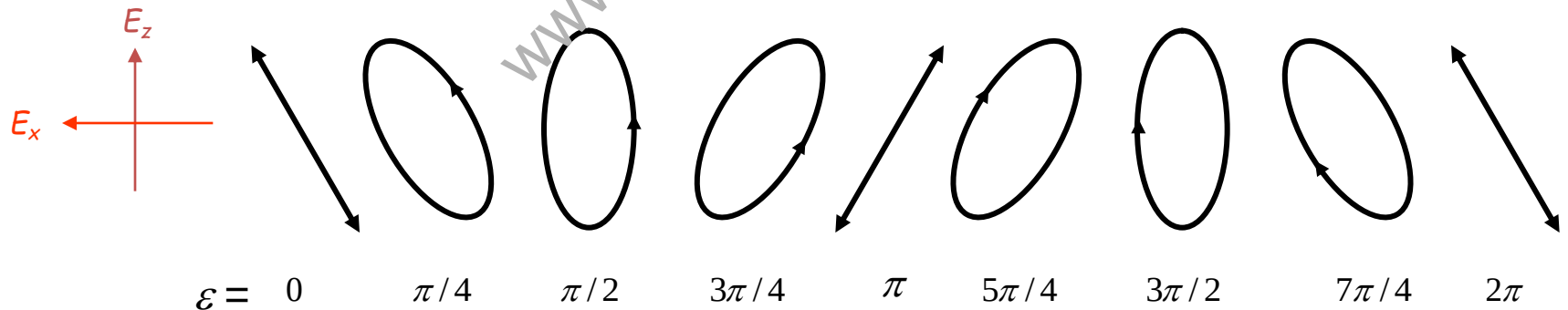
El campo resultante $\vec{E}(z, t)$ **gira** describiendo una **elipse** rotada un ángulo α , con semiejes E_{0x} y E_{0y} .



Polarización elíptica general



Trayectoria descrita por el extremo del vector campo eléctrico a medida que avanza la onda



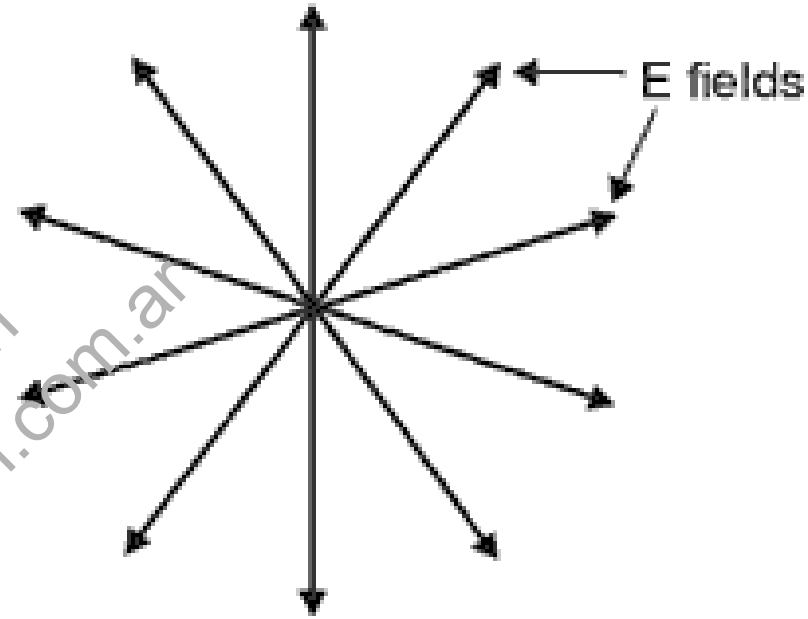
Nótese que las polarizaciones lineal y circular son casos particulares de la elíptica.

La luz natural

La luz que nos llega del sol o de una lámpara incandescente no privilegia ninguna dirección del plano perpendicular a la dirección de propagación, por lo tanto el campo rota constantemente en cualquier dirección. Decimos que es luz “no polarizada”.

Una fuente de luz ordinaria consiste de un número muy grande de emisores atómicos orientados al azar. Cada átomo excitado emite un tren de onda polarizado durante unos 10^{-8} s. Todas emisiones de distintas frecuencias se pueden combinar para formar una onda polarizada que no persiste más que ese tiempo.

Si los cambios de estado de polarización tienen lugar tan rápido que es imposible distinguir cualquier estado de polarización resultante, decimos que la onda es **luz natural** (o *luz polarizada al azar*).



La luz natural

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

Los estados de polarización varían rápidamente en el tiempo en la luz natural. Cuando las fases de las componentes x e y fluctúan de esa forma, se dice a veces que la luz es *no polarizada*. Matemáticamente, la luz natural se puede representar por dos ondas arbitrarias de igual amplitud, linealmente polarizadas, que son ortogonales e incoherentes entre sí, donde su *diferencia de fase relativa varía rápidamente y al azar*:

$$\text{donde } \begin{cases} \vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos [kz - \omega t - \theta_x(t)] \vec{i} \\ \vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \cos [kz - \omega t + \theta_y(t)] \vec{j} \end{cases}$$

donde $\theta_x(t)$ y $\theta_y(t)$ son las fases.

Si la fase relativa que varia temporalmente fluctúa, $\theta_x(t) - \theta_y(t)$, la luz no mantiene un único estado de polarización y de allí que se denomine no polarizada.

Obtención de luz polarizada

Discutiremos dos posibilidades para obtener luz polarizada:

1. Dicroísmo (absorción selectiva)
2. Reflexión (Ley Brewster)

También existen otras formas:

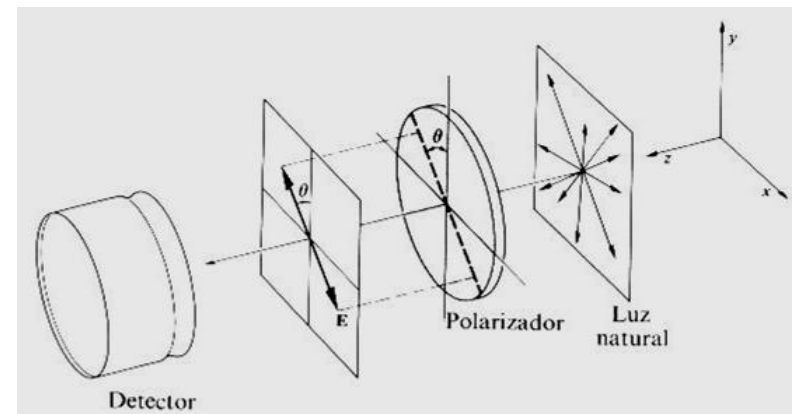
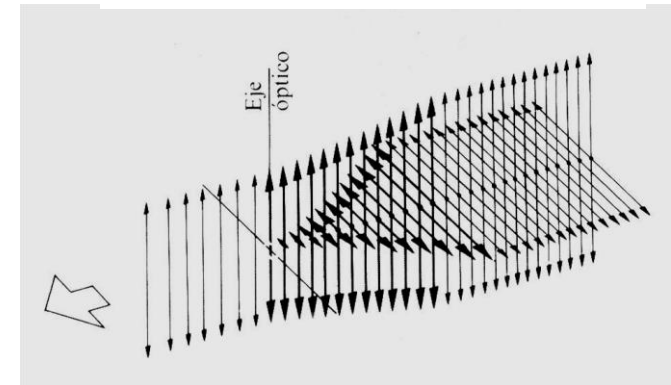
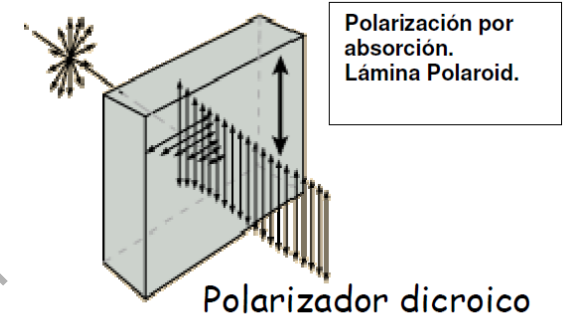
- Dispersión (scattering)
- Birrefringencia (doble refracción)

1. Dicroísmo (absorción selectiva)

Hay una absorción selectiva de una de las componentes del campo E incidente. Son medios *anisotrópicos* con asimetrías en su red cristalina que producen absorción preferencial en un eje (*eje óptico*).
Producen *polarización LINEAL*.

Ejemplos de medios dicróicos:

- turmalina (silicatos de boro),
- polaroids (Lamb, 1928).



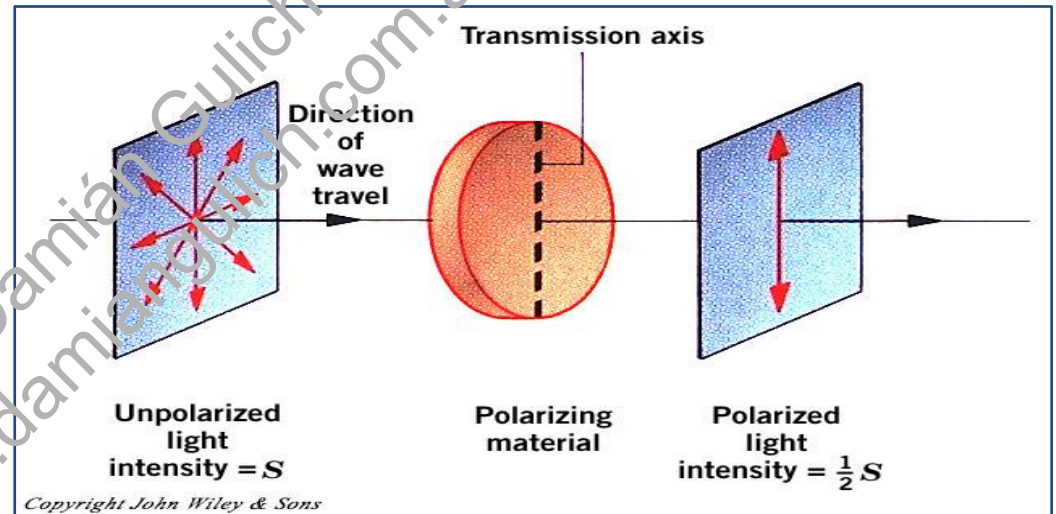
1. Dicroísmo (absorción selectiva)

Filtros polarizadores

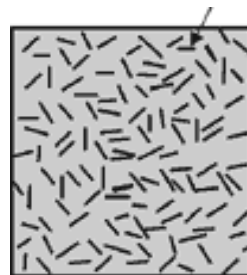
Un polarizador ideal deja pasar el 100% de la luz incidente en dirección de su eje de transmisión y bloquea toda la luz que incide vibrando en la dirección perpendicular. El más empleado usualmente es el *polaroid*.

Polaroid

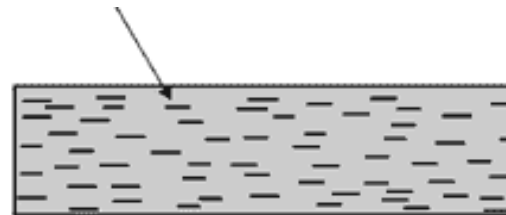
- Alcohol polivinílico impregnado con yodo
- Estirado en caliente
- Absorbe el campo E alineado con las moléculas
- Transmite el E perpendicular a las moléculas



Cadenas orientadas al azar

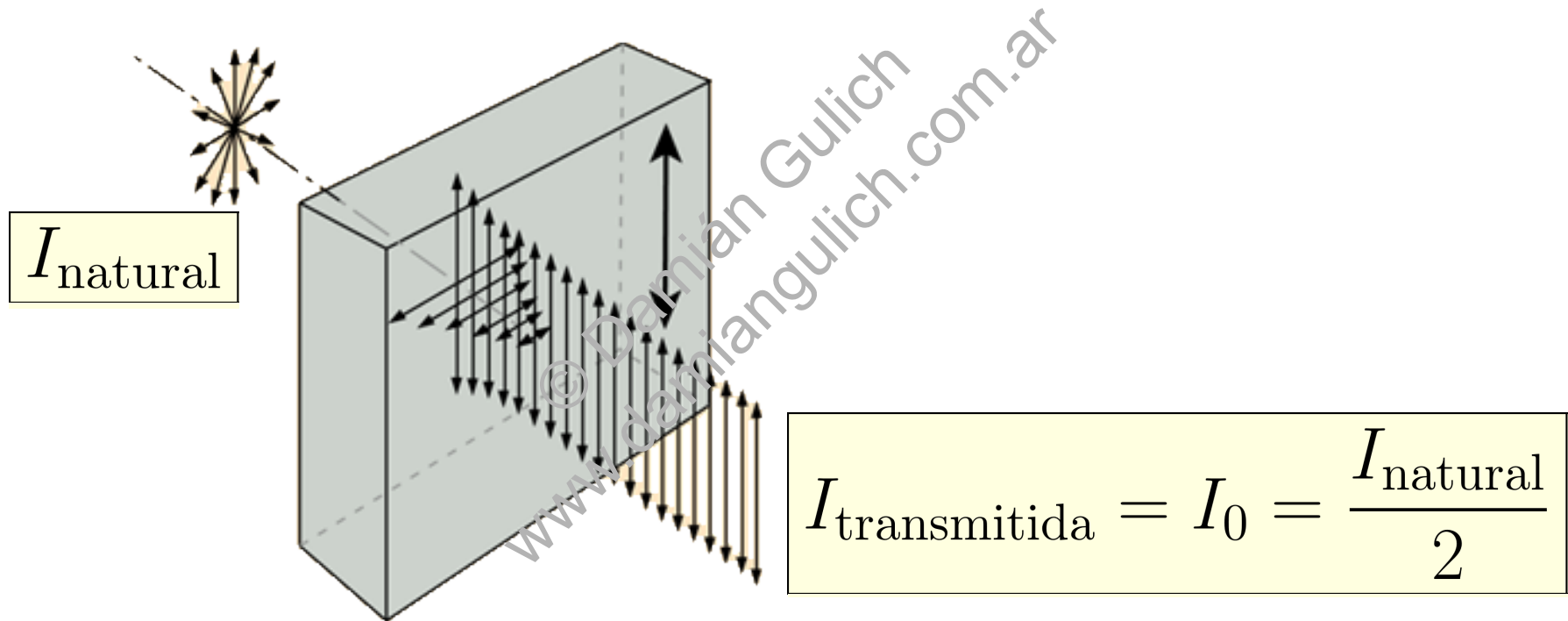


Cadenas alineadas



1. Dicroísmo (absorción selectiva)

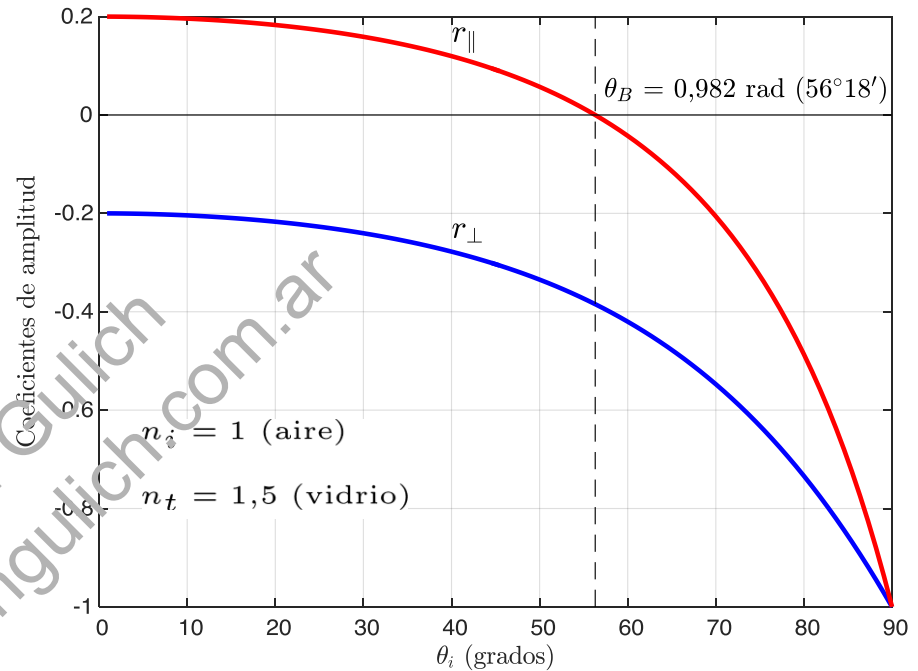
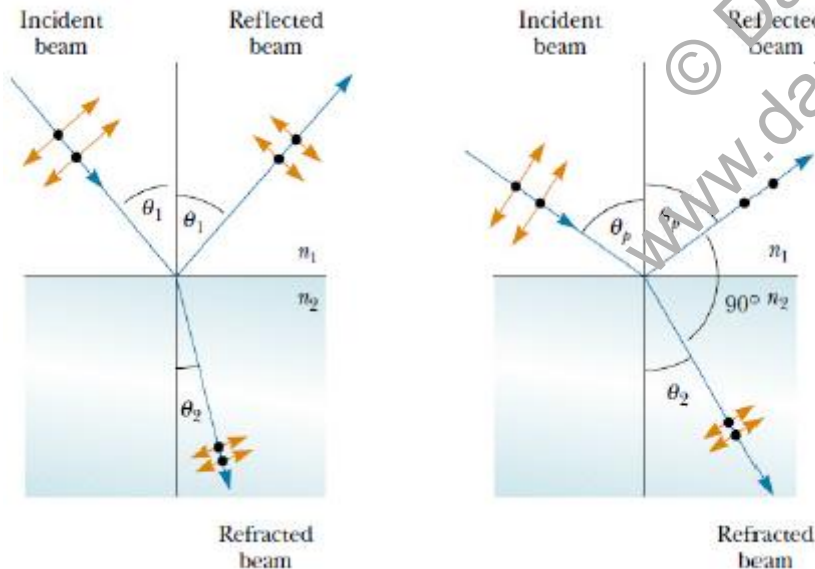
Si la entrada a un polarizador es luz natural, la salida es luz *linealmente polarizada* en la dirección del eje de transmisión del polarizador.



Cuando la luz natural incide sobre un polarizador, la intensidad transmitida es la *mitad de la incidente*.

2. Reflexión (Ley de Brewster)

Para ángulos de incidencia distintos de 0 o 90°, la proporción de luz reflejada en el límite entre dos medios no es igual para ambas componentes de la luz. La componente que vibra de forma paralela al plano de incidencia resulta menos reflejada (y es 0 en un caso particular).

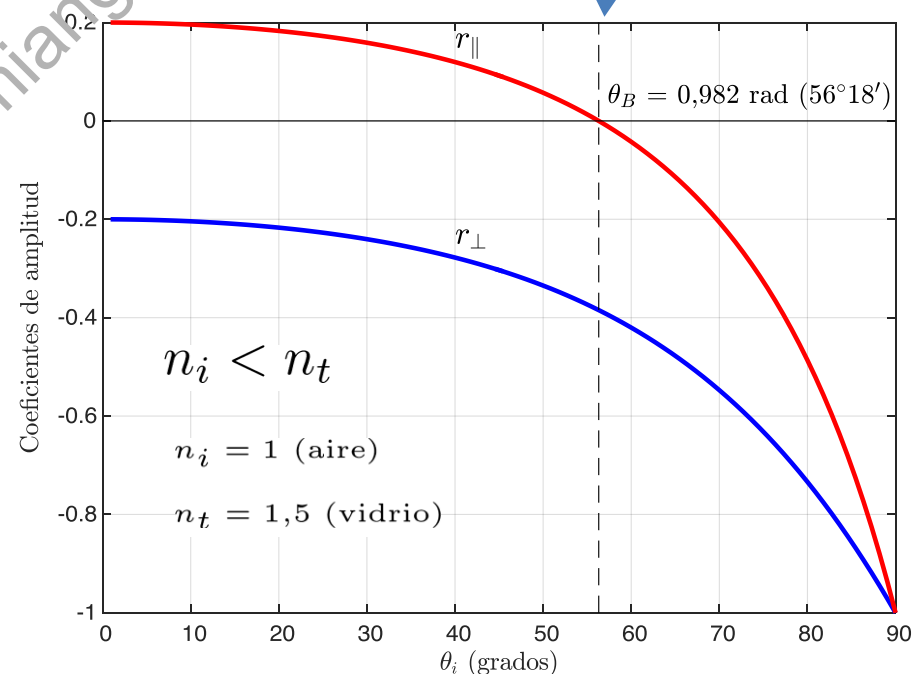
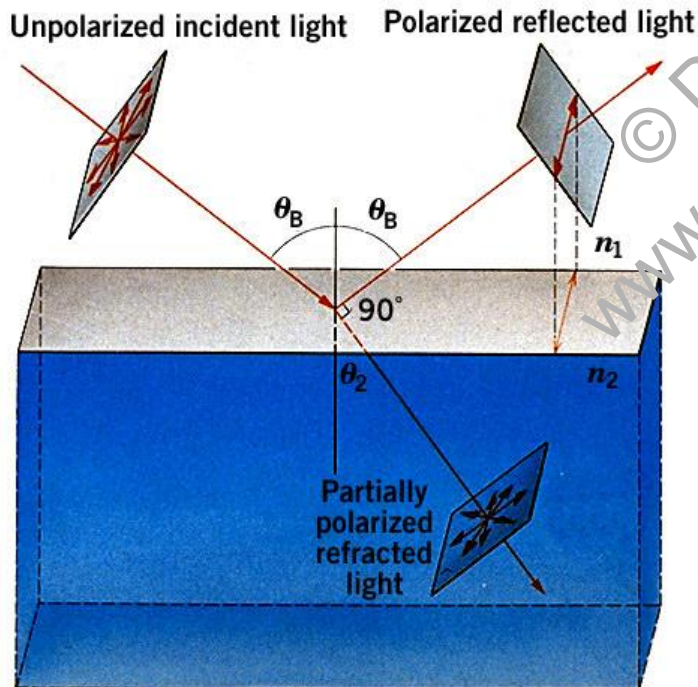


2. Reflexión (Ley de Brewster)

Cuando $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \equiv 90^\circ$ la luz reflejada a $\theta_i = \theta_B$ está SÓLO linealmente polarizada en la dirección perpendicular al plano de incidencia ($r_{\parallel} = 0$). Por Ley de Snell sabemos que $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$:

$$\Rightarrow \underline{n_i \sin(\theta_i)} = n_t \sin(\theta_t) = n_t \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = \underline{n_t \cos(\theta_i)}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta_B) = \frac{n_t}{n_i} \quad \theta_B \text{ es el ángulo de Brewster}$$



Un polarizador lineal puesto delante de una fuente natural

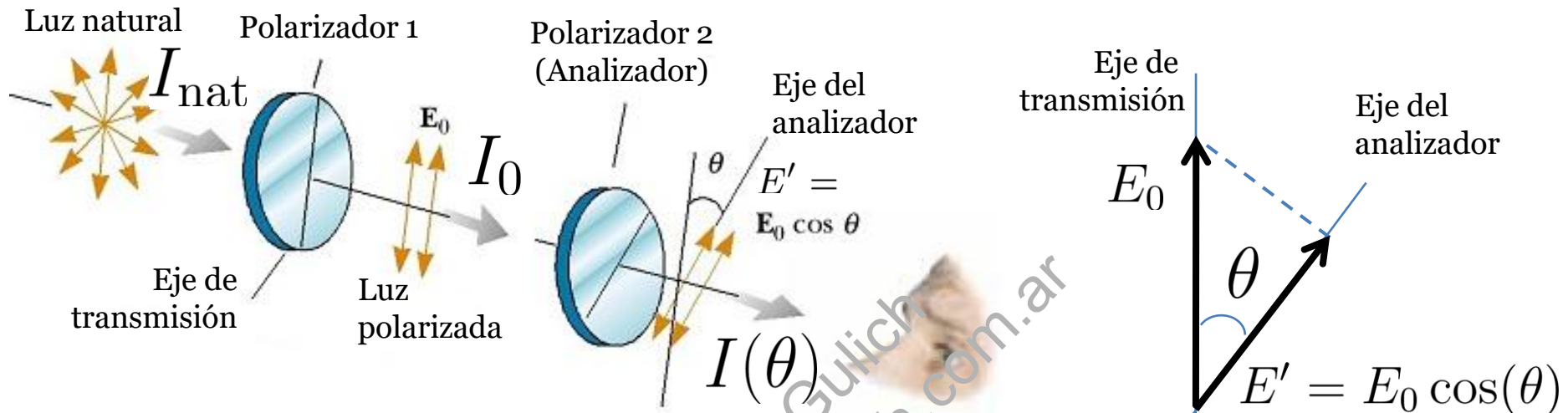
Matemáticamente luz natural se puede representar por dos ondas arbitrarias de igual amplitud, linealmente polarizados ortogonales e incoherentes donde su diferencia de fase relativa varía rápidamente y al azar.

Si la luz natural incide en un polarizador lineal solamente la luz en un estado será transmitida. El estado tendrá una orientación paralela a una dirección específica (eje de transmisión del polarizador)

Si polarizador se gira, intensidad a la salida no cambiará debido a la simetría de la luz no polarizada o natural (seguirá siendo $I_0/2$).



Ley de Malus (polarización lineal)



La intensidad I de la luz polarizada es

$$I_0 = \langle \|\vec{S}\| \rangle = \frac{c \epsilon_0}{2} \|\vec{E}\|_{\text{máx}}^2 = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2$$

La intensidad I de la luz que pasa por el analizador es

$$I(\theta) = \frac{c \epsilon_0}{2} E'^2 = \frac{c \epsilon_0}{2} [E_0 \cos(\theta)]^2 = I_0 \cos^2(\theta) \Rightarrow \boxed{I(\theta) = I_0 \cos^2(\theta)}$$

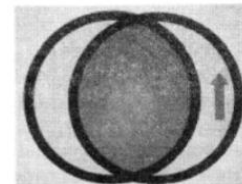
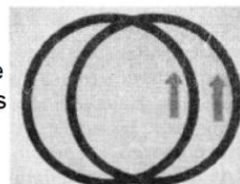
Ley de Malus

$I(\theta = 0) = I_0$ (polarizadores alineados)

$I(\theta = 90^\circ) = 0$ (polarizadores perpendiculares)

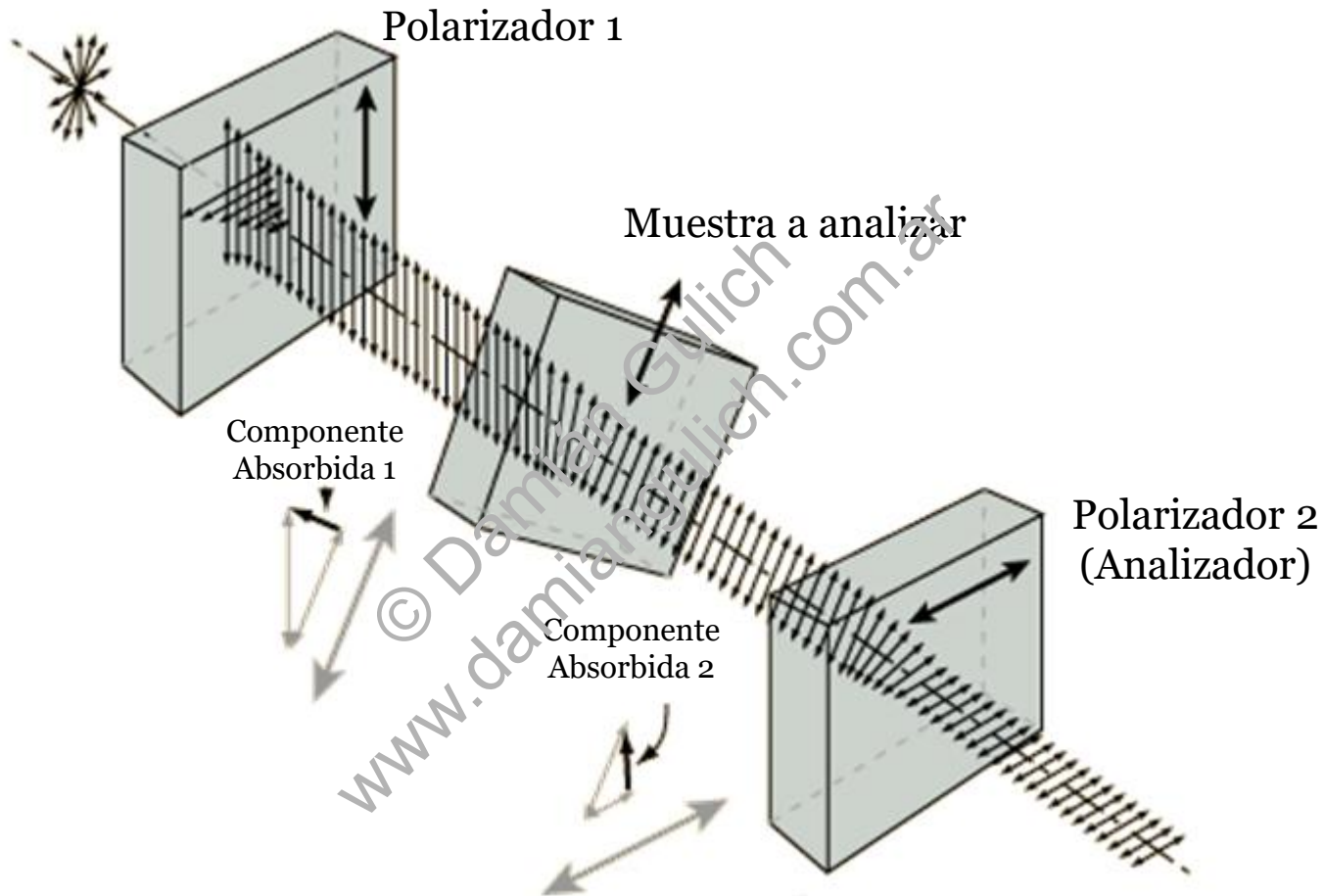
Con la luz natural sola no se puede usar la Ley de Malus; ésta sólo se aplica para luz linealmente polarizada (polarizador 1).

Luz a través de 2 Polarizadores con Ejes //



Luz a través de 2 Polarizadores con Ejes $\perp$

La Ley de Malus para estudiar otros polarizadores



A pesar de que el polarizador 1 y el analizador están a 90° , sale luz del analizador porque la muestra ha torcido el plano de polarización de la luz que pasó por ella. El agua con azúcar disuelta en agua tiene esta propiedad y se usa la Ley de Malus para medir la concentración de glucosa en una muestra (sacarímetro).

Algunas aplicaciones prácticas

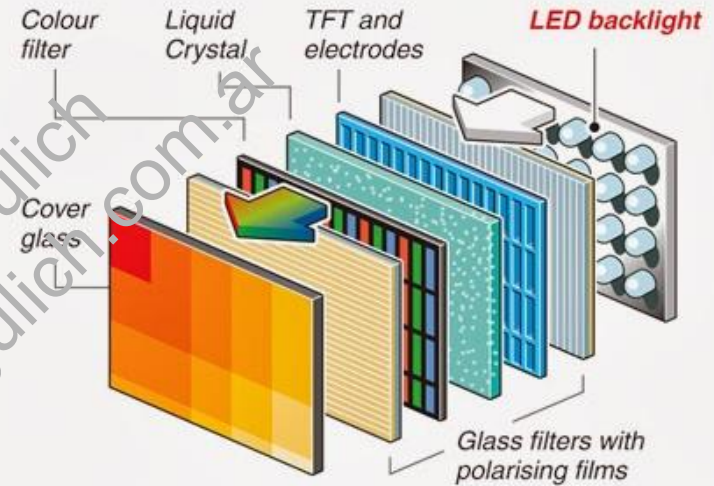
撕开偏光片后的效果

Polarizer film display effect after Partial tearing



LED - Light Emitting Diode

LEDs are LCD TVs that replace the cold cathode fluorescent lamps (CCFL) used in conventional LCD displays



Seven-Segment Liquid Crystal Display (LCD)

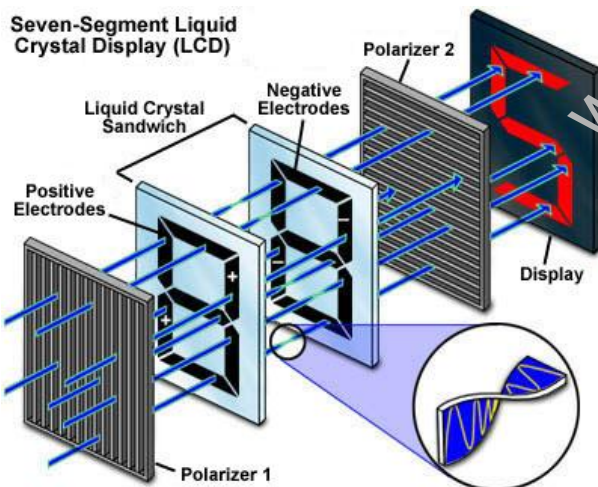


Figure 3



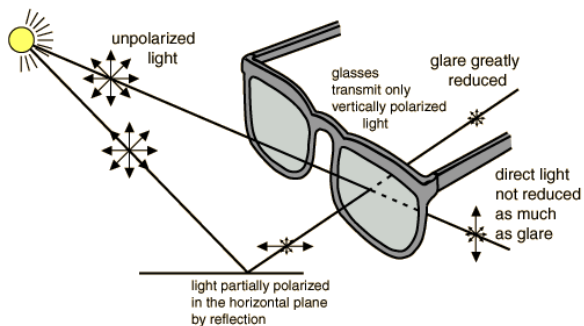
Algunas aplicaciones prácticas



Reflexión a través de polarizador que sólo transmite luz polarizada horizontalmente



Reflexión a través de polarizador que sólo transmite luz polarizada verticalmente



Preguntas

© Damian Gulich
www.damiangulich.com.ar