

02.03. Ecuaciones de Maxwell

Damián Gulich^{1,2}

¹Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

²Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

1 Ecuaciones de de Maxwell

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell



James Clerk Maxwell (1831-1879)

Born	13 June 1831 Edinburgh, Scotland	Known for	Maxwell's equations Maxwell relations Maxwell distribution Maxwell's demon Maxwell's discs Maxwell speed distribution Maxwell's theorem Maxwell material Generalized Maxwell model Displacement current Maxwell coil Maxwell's wheel ^[1]
Died	5 November 1879 (aged 48) Cambridge, England		
Resting place	Parton, Kirkcudbrightshire  55.006693°N 4.039210°W		
Nationality	Scottish		
Citizenship	British		
Alma mater	University of Edinburgh University of Cambridge		

El electromagnetismo hasta ahora

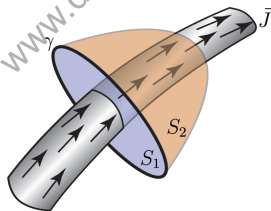
Ley de	Forma integral	Forma diferencial
Gauss ($\vec{E}$)	$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) dV'$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Gauss ($\vec{B}$)	$\oiint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Faraday-Lenz	$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{A}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampère	$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A} + ?$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + ?$

+Fuerza de Lorentz: $\vec{F}_L = q \left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E} \right)$

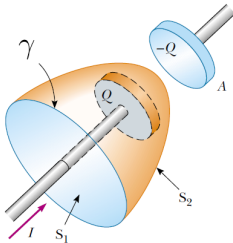
La Ley de Ampère y el Teorema de Stokes

$$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

Donde $\vec{J}$ es la *corriente de conducción*. La circulación de $\vec{B}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada γ es proporcional al flujo de la densidad de corriente de conducción a través de **cualquier** superficie S (abierta) limitada por γ . Esto puede traernos problemas.



El problema del capacitor



En un capacitor que se está cargando con una corriente $I(t)$ la densidad de corriente de conducción **es nula** entre las placas del capacitor.

¡La forma de la Ley de Ampère (1) falla!

$$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S_1} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I$$

$$= \iint_{S_2} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

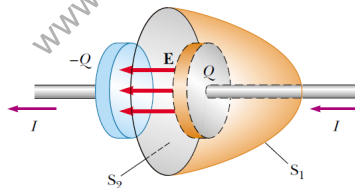
El genio de Maxwell

Maxwell notó lo siguiente: en el capacitor de área A y separación d

$$q = C\Delta V = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot Ed = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

la corriente de conducción es, por definición,

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = I_d \\ &= \iint_{S_2} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} = \iint_{S_2} \vec{J}_d \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$



Corriente de desplazamiento

Densidad de corriente de desplazamiento (de Maxwell)

Dado un campo eléctrico $\vec{E}$ que varíe en el tiempo, la densidad de corriente de desplazamiento es

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

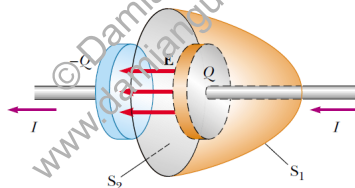
Corriente de desplazamiento (de Maxwell)

Dada una densidad de corriente de desplazamiento $\vec{J}_d$, la corriente de desplazamiento es

$$I_d = \iint_S \vec{J}_d \cdot d\vec{A} \quad (3)$$

Dónde están definidas las densidades de corriente

- En el cable sólo está definida $\vec{J}$ (y por lo tanto I).
- Entre las placas del capacitor sólo está definida $\vec{J}_d$ (y por lo tanto I_d). *In vacuo*.



La Ley de Ampère definitiva

La corriente de desplazamiento introducida por Maxwell generaliza completamente la Ley de Ampère, y por lo tanto la nueva versión (definitiva) es conocida como la *Ley de Ampère-Maxwell*.

Ley de Ampère-Maxwell (forma integral)

Dada una trayectoria cerrada γ y S cualquier superficie abierta tal que $\gamma = \partial S$:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S (\vec{J} + \vec{J}_d) \cdot d\vec{A} \quad (4)$$

donde $\vec{J}$ es la función de densidad de corriente de conducción, $\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ es la función de densidad de corriente de desplazamiento, y $\vec{B}$ es el campo magnético asociado a ellas.

La Ley de Ampère-Maxwell (forma diferencial)

Recordando el Teorema de Stokes para un campo $\vec{B}$ e identificando su parte derecha con la parte derecha de (4):

$$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

$$= \iint_S \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_d) \cdot d\vec{A}$$

tenemos

Ley de Ampère-Maxwell (forma diferencial)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (5)$$

Las ecuaciones de Maxwell

- Las *ecuaciones de Maxwell* son un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales parciales acopladas que hemos visto en el curso y que, junto con la ley de fuerza de Lorentz, forman la base del electromagnetismo clásico, la óptica clásica y los circuitos eléctricos.
- Fueron presentadas juntas por Maxwell entre 1861 y 1862.
- Unifican y sintetizan todos los fenómenos eléctricos y magnéticos. Son la primera teoría unificadora de la Física.
- Las ecuaciones de Maxwell describen cómo se generan los campos eléctricos y magnéticos por las cargas, las corrientes y los cambios de los campos

Las ecuaciones de Maxwell

Ley de	Forma integral	Forma diferencial
Gauss ($\vec{E}$)	$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) dV$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Gauss ($\vec{B}$)	$\oiint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Faraday-Lenz	$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampère-Maxwell	$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_d) \cdot d\vec{A}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

+Fuerza de Lorentz: $\vec{F}_L = q \left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E} \right)$

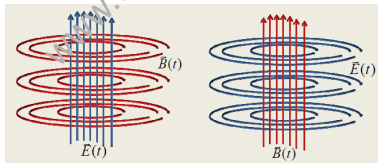
Las ecuaciones de Maxwell *in vacuo*

Se dice que estamos *in vacuo* si estamos lejos de corrientes de conducción y de cargas, es decir ($\vec{J} = 0$ y $\rho = 0$). En ese caso las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma diferencial tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

En este caso se ve claramente la simetría de aparición de los campos y que

- ¡Campos magnéticos que varían en el tiempo tienen asociados campos eléctricos!
- ¡Campos eléctricos que varían en el tiempo tienen asociados campos magnéticos!



Preguntas

Preguntas

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar