

02.01.Circuitos de corriente transitoria

Damián Gulich^{1,2}

¹Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

²Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

1 Circuitos de corriente transitoria

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Elementos

Con la introducción de la inductancia, tenemos los 3 elementos básicos que componen los distintos circuitos que veremos en el resto de las clases de esta curso.



Capacitor (C): almacena cargas, NO conduce corriente estacionaria (continua).



Resistencia (R): SÍ conduce corriente continua.



Inductancia (L): es relevante en circuitos de corriente que depende del tiempo.

Circuitos de corriente transitoria

Vamos a estudiar ahora el efecto de introducir los otros dos elementos circuitales (C y L) a un circuito que ya tiene una resistencia R .

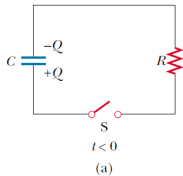
Como ya hemos discutido al hablar de inductancia, pareciera que no es posible establecer una corriente estacionaria en un circuito que contenga una R y una L ; debido al efecto de inducción de la ley de Faraday. Vamos a respaldar esta intuición con la resolución de circuitos serie que contengan

- R y C
- R y L
- L y C

aplicando las reglas de Kirchhoff a circuitos simples.

Para una mejor comprensión de los fenómenos observados, vamos a analizar cada uno por separado.

Descarga de un capacitor



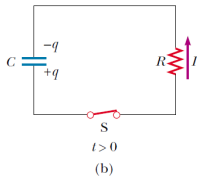
- El interruptor se cierra a tiempo $t = 0$ s.
- Inicialmente el capacitor tiene una carga $Q_0 = q(t = 0 \text{ s})$.
- Por la Ley de las Mallas:

$$V_C(t) - I(t)R = 0 \quad (1)$$

- En este caso

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$



Reemplazando en (1)

$$\frac{q(t)}{C} + \frac{dq(t)}{dt}R = 0 \quad (2)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden en la que $Q_0 = q(t = 0 \text{ s})$.

Descarga de un capacitor (2)

La ecuación (2) se resuelve así:

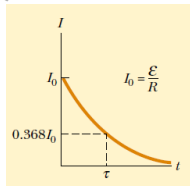
$$\frac{q(t)}{C} = -\frac{dq(t)}{dt}R \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow \int_{Q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

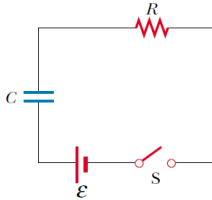
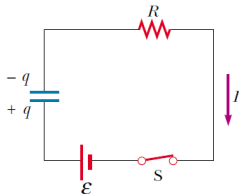
Descarga de un capacitor

$$q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (3)$$

donde $\tau = RC$ y marca el momento en el cual $q = Q_0/e \sim 0,37Q_0$.



Carga de un capacitor

(b) $t < 0$ (c) $t > 0$

- El interruptor se cierra a tiempo $t = 0$ s.
- Inicialmente el capacitor tiene una carga $q(t = 0 \text{ s}) = 0$.
- Por la Ley de las Mallas:

$$\mathcal{E} - I(t)R - V_C(t) = 0 \quad (4)$$

- Como $I = dq/dt$ y $V_C = q/C$

$$\mathcal{E} - \frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C} = 0 \quad (5)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden en la que $q(t = 0 \text{ s}) = 0$.

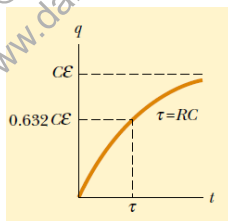
Carga de un capacitor

Carga de un capacitor

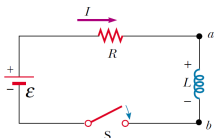
La solución a la ecuación diferencial (5) es

$$q(t) = Q_{\max} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (6)$$

donde $Q_{\max} = C\mathcal{E}$ y $\tau = RC$ marca el momento en el cual $q = Q_{\max} (1 - 1/e) \sim 0,63 Q_{\max}$.



Circuito RL : establecimiento de una corriente estacionaria



Al cerrar el interruptor S , comienza a circular corriente por el circuito, pero L genera una fem inducida que se opone al establecimiento de la corriente: su polaridad está en oposición con $\mathcal{E}$, y su módulo viene dado por $V_L = L dI/dt$.

- Inicialmente en L la corriente es $I(t = 0\text{s}) = 0$.
- Por la Ley de las Mallas:

$$\mathcal{E} - I(t)R - V_L(t) = 0 \quad (7)$$

- Entonces

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (8)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden en la que $I(t = 0\text{s}) = 0$.

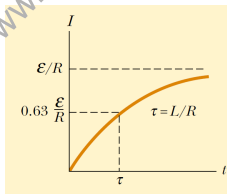
Circuito RL : establecimiento de una corriente estacionaria (2)

Establecimiento de una corriente estacionaria en circuito RL

La solución a la ecuación diferencial (8) es

$$I(t) = I_{\max} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \quad (9)$$

donde $I_{\max} = \mathcal{E}/R$ y $\tau_L = L/R$ y marca el momento en el cual $I = I_{\max} (1 - 1/e) \sim 0,63 I_{\max}$.



Consideraciones energéticas

Cuando se establece una corriente en un circuito con inductancia y resistencia, una parte de la energía suministrada por la batería se transforma en energía interna en la resistencia (efecto Joule) y la otra parte se almacena en el campo magnético de la inductancia. De la ecuación diferencial (8)

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\mathcal{E}I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

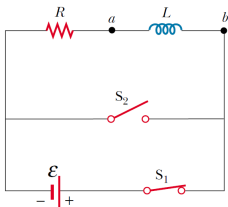
$$\text{Potencia batería} = \text{Ef. Joule} + \frac{dU_B}{dt}$$

donde $\frac{dU_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$ es el ritmo de almacenamiento de energía magnética de donde

$$U_B = \int dU_B = \int_0^{I_{\text{final}}} LI dI = \frac{1}{2} LI_{\text{final}}^2$$

que es el resultado que vimos (sin demostrar) en la clase sobre Faraday-Lenz.

Circuito RL : corte de una corriente estacionaria



- Al cerrar el interruptor S_1 , fluye una corriente en el sentido indicado. Luego de un tiempo $t \gg \tau_L$ la corriente estacionaria será $I = \varepsilon/R$.
- Si ahora abrimos S_1 y cerramos S_2 , sólo circulará corriente por la malla de arriba, pero la inductancia invirtió la polaridad.
- Por la Ley de las Mallas (y como no hay fems):

$$-I(t)R - L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (10)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden en la que $I(t=0\text{ s}) = I_0$.

Circuito RL : corte de una corriente estacionaria (2)

De la ecuación diferencial (10):

$$-IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

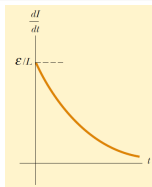
de donde $\ln(I/I_0) = -(R/L)t$.

Corte de una corriente estacionaria en circuito RL

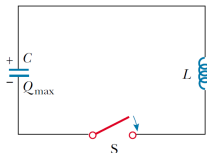
La solución a la ecuación diferencial (10) es

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau_L} \quad (11)$$

donde $I_0 = \mathcal{E}/R$ y $\tau_L = L/R$ y marca el momento en el cual $I = I_0/e \sim 0,37 I_0$.



Circuito LC (oscilador electromagnético)



- Supongamos al capacitor inicialmente cargado.
- Por la Ley de las Mallas (y como no hay fems):

$$\frac{q(t)}{C} - L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (12)$$

pero en términos, en este caso, de $I = -dq/dt$

$$\frac{q(t)}{C} + L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = 0$$

de donde

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q(t) \quad (13)$$

Circuito LC (oscilador electromagnético) (2)

La ecuación diferencial (13) es idéntica a la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple (Física I). Su solución es

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (14)$$

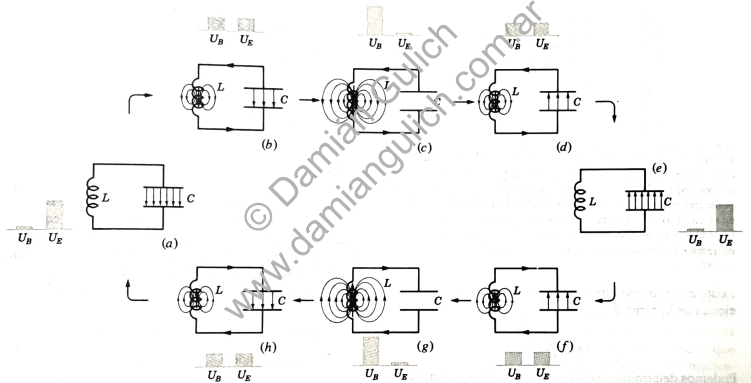
donde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (15)$$

y δ alguna fase inicial. En este caso la corriente es $I = -dq/dt$ por lo que derivando (14):

$$I(t) = \omega Q_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (16)$$

Circuito LC (oscilador electromagnético) (3)



Circuito LC (oscilador electromagnético) (4)

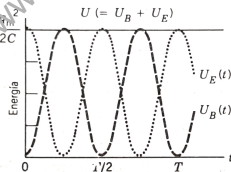
Las solución (14) permite escribir la energía eléctrica

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \delta)$$

La solución (16) permite escribir la energía magnética

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{I_0^2(\omega Q_0)^2}{2} \sin^2(\omega t + \delta)$$

por lo que la energía electrostática en el capacitor y la energía magnética en la bobina también oscilan, pero la suma $U = U_E + U_B$ permanece constante.



Preguntas

Preguntas

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar