

01.11.Ley de inducción de Faraday Autoinducción

Damián Gulich^{1,2}

¹Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

²Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

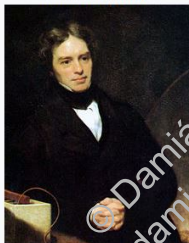
1 Ley de inducción de Faraday

2 Autoinducción

© Damián Gulich
www.damiangulich.com.ar

Ley de inducción

Michael Faraday



Michael Faraday, 1842, by Thomas Phillips

Born	22 September 1791 Newington Butts, England
Died	25 August 1867 (aged 75) Hampton Court, Middlesex, England
Residence	United Kingdom
Nationality	British
Known for	Faraday's law of induction Electrochemistry

Joseph Henry



1st Secretary of the Smithsonian
Institution

In office
1846–1878

Succeeded by Spencer Fullerton Baird

Personal details

Born	December 17, 1797 Albany, New York, U.S.
Died	May 13, 1878 (aged 80) Washington, D.C., U.S.
Nationality	American

Flujo del campo magnético

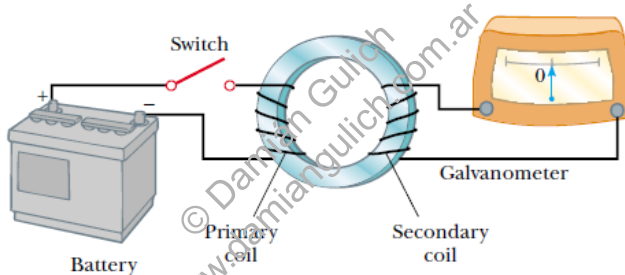
Así como lo definimos para el caso del campo eléctrico, dada una superficie S y un campo magnético $\vec{B}$, decimos que el flujo en este caso (en todas sus variantes) es

$$\Phi_B(S) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dA = \iint_S B \cos(\theta) dA \quad (1)$$

El weber (Wb) es la unidad propia para el flujo del campo magnético:

$$[\Phi_B] = [B] [A] = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{Wb}$$

Un experimento fundamental



Lo único que vincula al circuito primario con el secundario son las líneas del campo magnético.

Ley de inducción Faraday

Ley de inducción Faraday (versión 1.0)

La fuerza electromotriz (fem) $\mathcal{E}$ inducida en un circuito es proporcional al cambio del flujo magnético a través del circuito según:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (2)$$

Si el circuito tiene N vueltas, entonces

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

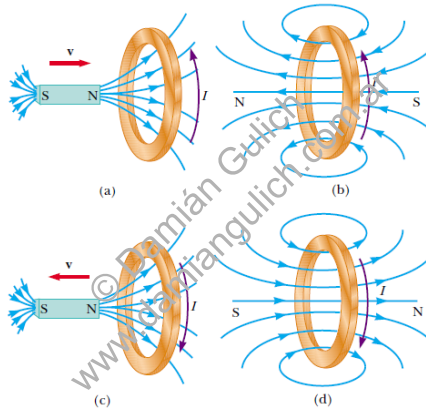
Ley de Lenz

El signo (-) en la Ley de Inducción de Faraday es debido al siguiente resultado:

Ley de Lenz

El sentido de la fem inducida en un circuito es tal que hace circular una corriente que crea un flujo magnético que se opone al cambio del flujo externo sobre el circuito.

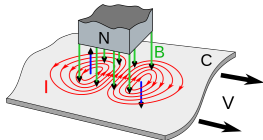
Ley de Lenz (2)



(a) Cuando el imán se mueve hacia el anillo conductor estacionario, se induce una corriente en la dirección que se muestra. (b) Esta corriente inducida produce su propio flujo magnético que se dirige hacia la izquierda y contrarresta el creciente flujo externo hacia la derecha.

(c) Cuando el imán se aleja del anillo conductor estacionario, se induce una corriente en la dirección que se muestra. (d) Esta corriente inducida produce un flujo magnético que se dirige hacia la derecha y contrarresta el flujo externo decreciente hacia la derecha.

Corrientes parásitas (o de Foucault)

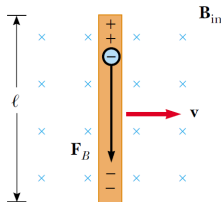


Quando el flujo magnético a través de un trozo grande de conductor cambia, aparecen corrientes inducidas en el material (llamadas “corrientes parásitas”, “de remolino” o “de Foucault”).

- A veces son indeseables por calentar los materiales. Esto se soluciona con laminados (transformadores).
- Otras veces este calentamiento es útil, como por ejemplo en los hornos de inducción, en los que un material se calienta usando un campo $\vec{B}$ que varía rápidamente.
- En los frenos magnéticos son particularmente útiles por ser más eficientes (tienen menos desgaste) que los frenos mecánicos a alta velocidad.

fem de movimiento

En un conductor en movimiento por una región en la que hay un campo magnético también se produce una fem. A esta fem se la conoce como *fem de movimiento*.



- Para las cargas en el conductor $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ que apunta hacia abajo.
- Los electrones se acumulan en la parte de abajo y arriba queda carga +. Entre ellos se establece un campo $\vec{E}$ hacia abajo ($\vec{F}_E$ es hacia arriba).
- La condición de equilibrio se logra cuando

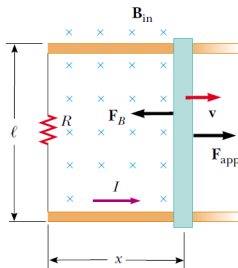
$$qE = qvB \implies E = vB$$

- La diferencia de potencial es entonces

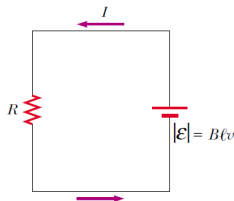
$$\Delta V = E\ell = B\ell v \quad (3)$$

La diferencia de potencial se mantiene entre las puntas del conductor mientras se siga moviendo por un campo uniforme.

fem de movimiento (2)



(a)



(b)

- El flujo a través del circuito es $\Phi_B = B\ell x$
- Por Ley de Faraday-Lenz, si $dx/dt = v$, la fem de movimiento es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\ell v$$

- Si la resistencia del circuito es R , la corriente es

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

- A medida que la barra se mueve por los rieles experimenta una fuerza magnética $\vec{F}_B = I\ell B$ opuesta al movimiento de la barra (de otra forma violaría la conservación de la energía). La fuerza externa por lo tanto es $F_{ap} = I\ell B$. La potencia suministrada por el agente externo es

$$P = F_{ap}v = I\ell Bv = \frac{B^2\ell^2v^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

esta potencia entregada es igual a la potencia entregada a la resistencia ($I^2 R$); es también igual a la potencia que entrega la fem de movimiento ($I\mathcal{E}$).

Este ejemplo muestra la conversión de energía mecánica a energía eléctrica y finalmente a energía interna en la resistencia.

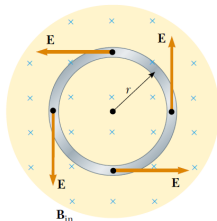
fem inducida y campos eléctricos

Hemos visto que un flujo magnético cambiante induce una fem y una corriente en un circuito conductor. Por lo tanto, debemos concluir que se crea un campo eléctrico en el conductor como resultado del cambio del flujo magnético.

Sin embargo, este campo eléctrico inducido tiene dos propiedades importantes que lo distinguen del campo electrostático producido por cargas estacionarias:

- No es conservativo
- puede variar en el tiempo

fem inducida y campos eléctricos (2)



- Si el campo magnético cambia en el tiempo, en este caso

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = -\left(\pi r^2\right) \frac{dB}{dt} \quad (4)$$

y esta fuente no está localizada.

- La corriente inducida implica un campo eléctrico $\vec{E}$ que es tangente a cada punto de la espira.
- Como la fuente no está localizada, el trabajo para llevar una carga de prueba q en una vuelta completa es $q\mathcal{E}$.
- La fuerza eléctrica es $q\vec{E}$, y por definición el trabajo en la trayectoria cerrada es

$$\oint_{\text{circ.}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\text{circ.}} q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = qE2\pi r = q\mathcal{E} \quad (5)$$

de donde por (4)

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r} = -\left(\frac{r}{2}\right) \frac{dB}{dt} \quad (6)$$

¡Hay un campo eléctrico asociado a un campo magnético variable!

fem inducida y campos eléctricos (3)

Ley de inducción Faraday (versión 2.0)

La fem en cualquier recorrido cerrado γ puede ser expresada en términos de $\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. En casos generales, $\vec{E}$ puede ahora no ser constante y la trayectoria puede no ser circular, entonces

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (7)$$

fem inducida y campos eléctricos (4)

Recordando el Teorema de Stokes para un campo $\vec{E}$ e identificando su parte derecha con la parte derecha de (7), y suponiendo S fija:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

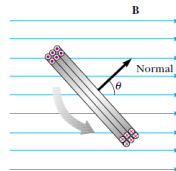
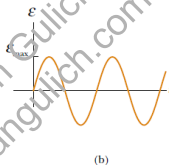
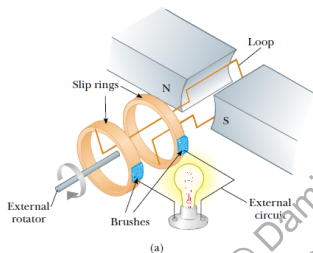
tenemos

Ley de inducción Faraday (versión 2.0, forma diferencial)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

¡Campos magnéticos que varían en el tiempo tienen asociados campos eléctricos!

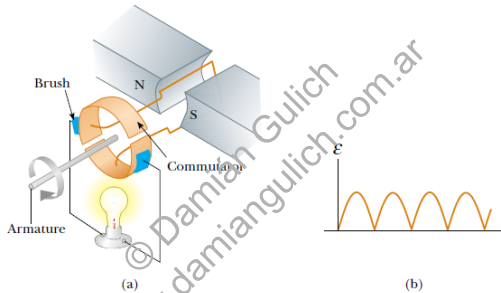
Generador de corriente alterna



$$\mathcal{E}(t) = NAB\omega \sin(\omega t) = \mathcal{E}_{\max} \sin(\omega t)$$

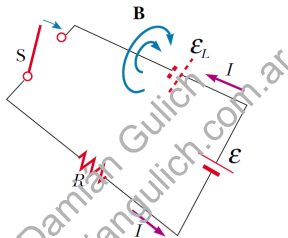
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{NAB\omega}{R} \sin(\omega t) = I_{\max} \sin(\omega t)$$

Generador de corriente directa



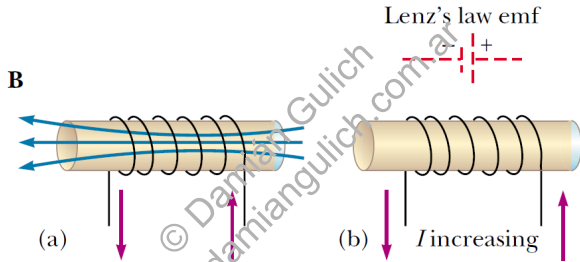
Para lograr una corriente aproximadamente continua, se ponen muchas espiras (y delgas) ligeramente desfasadas entre sí, de manera que la suma de las fems inducidas de aproximadamente una constante.

fem autoinducida



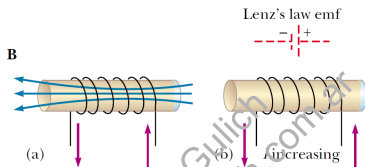
Después de cerrar el interruptor, la corriente produce un flujo magnético a través del área encerrada por el circuito. A medida que la corriente aumenta hacia su valor de equilibrio, este flujo magnético cambia en el tiempo e induce una fem en el circuito cerrado. El símbolo de batería dibujado con líneas discontinuas representa la *fem autoinducida* $\mathcal{E}_L$.

fem autoinducida (2)



(a) Una corriente en la bobina produce un campo magnético dirigido hacia la izquierda. (b) Si la corriente aumenta, el flujo magnético creciente crea una fem inducida que tiene la polaridad mostrada por la batería discontinua.

fem autoinducida (2)



- En la clase de Ley de Ampère vimos que el campo en un solenoide es $B = \mu_0 n I$, es decir, podemos generalizar y afirmar que $B \propto I$.
- Si la sección transversal tiene área fija A , entonces el flujo de una espira es $\Phi_B = BA \propto IA$
- Por la Ley de Faraday

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L &= -N \frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -L \frac{dI}{dt}\end{aligned}\tag{9}$$

donde L es una constante de proporcionalidad llamada *inductancia*. Esta medida depende de la geometría del circuito.

Inductancia

De la expresión (9), la inductancia de un solenoide de N vueltas es

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (10)$$

donde se asume el mismo flujo para cada espira. Esta expresión también se puede escribir por (9) como

$$L = - \frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt} \quad (11)$$

así como la resistencia ($R = \Delta V/I$) es una oposición a la corriente, las inductancias son una medida de la oposición al *cambio* de corriente.



Por (10) o (11), definimos la unidad de L como el henry (H):

$$[L] = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \text{H}$$

Ejemplo: la inductancia de un solenoide largo

- Dentro del solenoide vimos que $B = \mu_0 n I$ donde $n = N/\ell$ es la cantidad de vueltas por unidad de longitud.
- El flujo magnético es

$$\Phi_B = B A = \frac{\mu_0 N A}{\ell} I$$

- De la definición (10)

$$L = \frac{N \Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

Esto también se puede expresar como

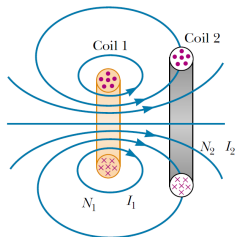
$$L = \mu_0 n^2 V \quad (12)$$

donde $V = A\ell$ es el volumen del solenoide

Inductancia mutua

Muy a menudo, el flujo magnético a través del área encerrada por un circuito varía con el tiempo debido a las corrientes que varían en el tiempo en los circuitos cercanos. Esta condición induce una fem a través de un proceso conocido como *inducción mutua*, llamada así porque depende de la interacción de dos circuitos.

Inductancia mutua (2)



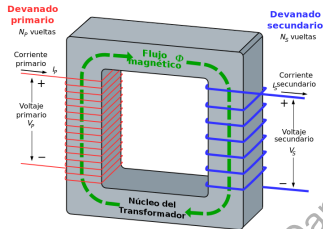
- Sean los bobinados 1 y 2.
- El bobinado 1 tiene N_1 vueltas y por él pasa una corriente I_1 que crea un campo magnético que pasa por el bobinado 2.
- El bobinado 2 tiene N_2 vueltas y el flujo causado por el campo de la bobina 1 es Φ_{12} .

Análogamente a la definición (10) ($L = N\Phi_B/I$) definimos la **inductancia mutua** M_{12} de la bobina 2 respecto a la bobina 1 como

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (13)$$

Se puede demostrar que $M_{12} = M_{21} = M$. En general $M = k\sqrt{L_1 L_2}$, con $0 < k < 1$.

El transformador



- En un transformador monofásico ideal tenemos un bobinado primario de N_P vueltas conectado a una fem variable V_P . El flujo es $N_P \Phi$ y

$$V_P = -N_P \frac{d\Phi}{dt}$$

- El mismo flujo Φ pasa por el bobinado secundario de N_S vueltas. Allí la fem inducida V_S será

$$V_S = -N_S \frac{d\Phi}{dt}$$

- Dividiendo ambas ecuaciones tenemos

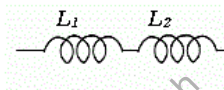
$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P}$$

Finalmente

$$V_S = \left(\frac{N_S}{N_P} \right) V_P$$

El cociente N_S/N_P se regula en la fabricación y así permite convertir cualquier tensión variable de entrada en cualquier tensión variable de salida que se desee.

Inductancias en serie (sin interacción)



Por las inductancias en serie circula la misma corriente I . En cada una la caída de potencial es $\mathcal{E}_i = -L_i dI/dt$; luego

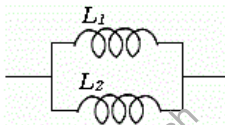
$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} = -(L_1 + L_2) \frac{dI}{dt} = -L_{\text{eq}} \frac{dI}{dt}$$

Inductancias en serie

Si las inductancias $L_1, \dots, L_N$ están todas en serie (sin interacción), su inductancia equivalente es

$$L_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N L_i \quad (14)$$

Inductancias en paralelo (sin interacción)



En cada una $\mathcal{E}_i = -L_i dI_i/dt$, de donde $dI_i/dt = -\mathcal{E}_i/L_i$.

Las inductancias en paralelo están a la misma diferencia de potencial $\mathcal{E}_0$.

Si la corriente de la rama principal es I_0 y $I_1 + I_2 = I_0$. Derivando respecto del tiempo esta expresión:

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{L_{\text{eq}}}\mathcal{E}_0$$

Inductancias en paralelo

Si las inductancias $L_1, \dots, L_N$ están todas en paralelo (sin interacción), su inductancia equivalente se halla con

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i} \quad (15)$$

Densidad de energía magnética

Se puede demostrar que la energía magnética guardada en una inductancia por la que pasa una corriente I es

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

En el caso del solenoide largo vimos que (12) $L = \mu_0 n^2 A \ell$ (donde el volumen es $A \ell$). Como $B = \mu_0 n I$, podemos despejar $I = B / (\mu_0 n)$.

La energía magnética por unidad de volumen es entonces

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1}{2} \frac{L I^2}{A \ell} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 n^2 A \ell}{A \ell} \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 \\ &= \boxed{\frac{B^2}{2\mu_0}} \end{aligned} \quad (16)$$

Preguntas

Preguntas

© Damían Gulich
www.damiangulich.com.ar