

01.06. Capacitores y energía electrostática

Damián Gulich^{1,2}

¹Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

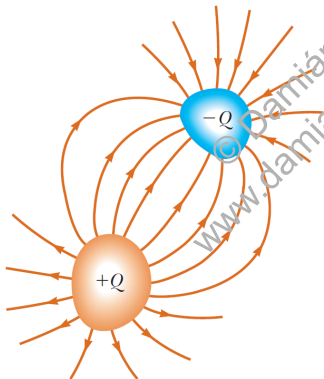
²Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

- 1 Capacitores
- 2 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico

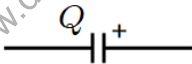
Capacitor

- Un *capacitor generalizado* consta de un par de conductores de formas arbitrarias, aislados de su entorno y en el vacío (a los que llamamos *placas*).
- Decimos que el capacitor está *cargado* si sus placas contienen cargas $+Q$ y $-Q$ iguales y opuestas respectivamente.

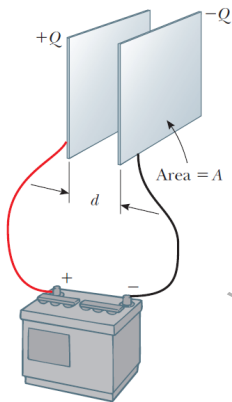


Capacitor (2)

- Si bien la carga neta del capacitor es 0, diremos que Q (como valor absoluto de la carga en cualquiera de sus placas) es “la carga del capacitor” o “carga acumulada”.
- Una vez dicha la carga del capacitor, debe indicarse el signo de cada una de las placas (por lo general se indica la placa de signo $+$).



Un capacitor cargado



- Podemos cargar un capacitor conectando las dos placas a terminales opuestas de una batería.
- Como los cables y las placas son conductores, la diferencia de potencial ΔV entre las placas es la misma que entre los bornes de la batería.

La capacitancia

Capacitancia

En los casos que estudiaremos existe una proporcionalidad directa entre la carga acumulada Q y la diferencia de potencial V entre las placas:

$$Q = C \Delta V \quad (1)$$

donde C es la *capacitancia* (o *capacidad*) y depende de la geometría del capacitor. Obviamente

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (2)$$

Unidades de la capacitancia

De la definición (2), las unidades de C son

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{V} = F$$

donde F significa “faradios” en honor a Michael Faraday, de quien se hablará extensamente en futuras clases.

Magnitudes comercialmente empleadas son los

- *microfaradios*: $\mu F = 10^{-6} F$
- *picofaradios*: $pF = 10^{-12} F$

Cálculo de la capacitancia

Dado un capacitor de determinada geometría, en líneas generales se puede seguir la siguiente estrategia para hallar la capacitancia:

- 1 Suponer una carga Q (positiva) acumulada.
- 2 Hallar el campo $\vec{E}$ entre las placas en términos de la carga, usando la Ley de Gauss.
- 3 Sabido $\vec{E}$, hallamos la magnitud de la diferencia de potencial según

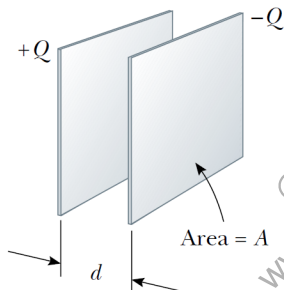
$$\Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \boxed{\int_{+}^{-} E d\ell} \quad (3)$$

Así definida, ΔV es siempre positiva.

- 4 Hallamos según (2) la capacidad como $C = Q/\Delta V$, que siempre debe ser una magnitud positiva.

Capacitor de placas plano paralelas

¡Esto se usará en el laboratorio!



1 Sea la carga Q

2 Vimos que entre las placas

$$\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0) \hat{i} = [Q/(A\epsilon_0)] \hat{i}$$

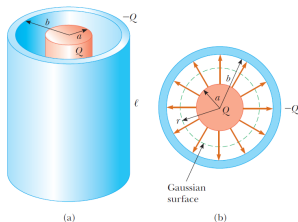
3 $\Delta V = Qd/(A\epsilon_0)$

4 De $C = Q/\Delta V$ despejamos

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4)$$

Ejemplo: Si $A = 1 \text{ m}^2$ y $d = 0,1 \text{ mm}$ entonces $C = 88,54 \text{ nF}$. Si $V = 1 \text{ V}$ ese capacitor tiene una carga $Q = 88,54 \text{ nC}$.

Capacitor cilíndrico

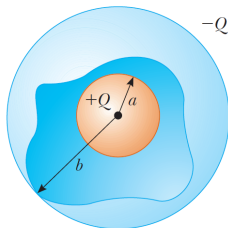


- 1 Sea la carga Q
- 2 Por Gauss $\vec{E} = [Q / (2\pi\epsilon_0 \ell r)] \vec{r}$ (donde $\vec{r}$ es el vector radial de las coordenadas cilíndricas)
- 3 $V = [Q / (2\pi\epsilon_0 \ell)] \ln(b/a)$
- 4 De $C = Q/V$ despejamos

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{\ell}{\ln(b/a)}$$

Ejemplo: Si $a = 0,5 \text{ mm}$ y $b = 3,5 \text{ cm}$ y $\ell = 15 \text{ cm}$ entonces $C = 1,9642 \text{ pF}$. Si $V = 1 \text{ V}$ ese capacitor tiene una carga $Q = 1,9642 \text{ pC}$.

Capacitor esférico



- 1 Sea la carga Q
- 2 Por Gauss $\vec{E} = [Q / (4\pi\epsilon_0 r^2)] \hat{r}$
(donde $\hat{r}$ es el versor radial de las coordenadas esféricas)
- 3 $V = [Q / (4\pi\epsilon_0)] [(b - a) / (ab)]$
- 4 De $C = Q/V$ despejamos

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b - a} \right) \quad (5)$$

Ejemplo: Si $a = 0,3 \text{ m}$ y $b = 0,6 \text{ m}$, entonces $C = 66,758 \text{ pF}$. Si $V = 1 \text{ V}$ ese capacitor tiene una carga $Q = 66,758 \text{ pC}$.

Una esfera aislada

Una esfera aislada también tiene capacidad, como es el caso del generador de Van der Graaf que vimos en la clase de potencial. En la expresión de la capacitancia para un capacitor esférico podemos tomar el límite cuando el radio del cascarón exterior $b \rightarrow \infty$:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{ab}{b-a} \right) = 4\pi\epsilon_0 a$$

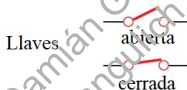
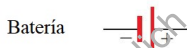
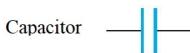
Ejemplo: Si $a = 0,3 \text{ m}$ entonces $C = 33,379 \text{ pF}$. Si $V = 1 \text{ V}$ (respecto de tierra) ese capacitor tiene una carga $Q = 33,379 \text{ pC}$.

Ejemplo 2: Si $C = 1 \text{ F}$ entonces el radio necesario es $a \sim 9 \cdot 10^9 \text{ m} = 12,94 R_{\text{Sol}}$.

Combinaciones de capacitores

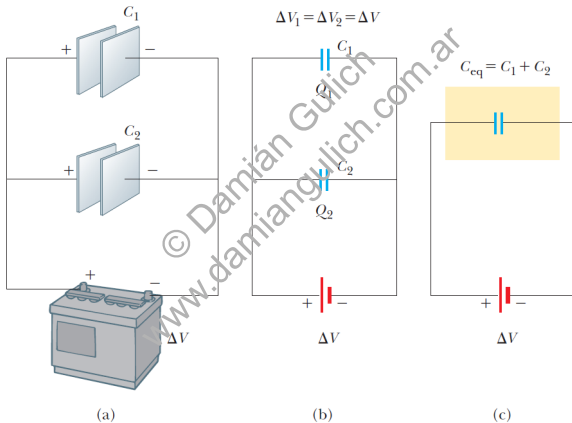
- Dos o más capacitores a menudo se combinan en circuitos eléctricos. Podemos calcular la capacitancia equivalente de ciertas combinaciones.
- Al estudiar los circuitos eléctricos, utilizamos una representación gráfica simplificada llamada *diagrama de circuito*. Tal diagrama usa símbolos de circuito para representar varios elementos de circuito.

Símbolos circuitales

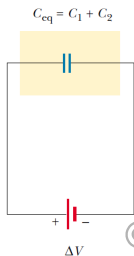
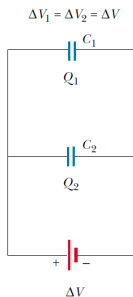


- Los símbolos del circuito están conectados por líneas rectas que representan los cables entre los elementos del circuito. El símbolo del capacitor refleja la geometría del modelo más común para un condensador, un par de placas paralelas.
- El terminal positivo de la *batería* (también llamada *fuerza*) tiene el potencial más alto y está representado en el símbolo del circuito por la línea más larga.

Capacitores en paralelo



Capacitores en paralelo (2)



$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

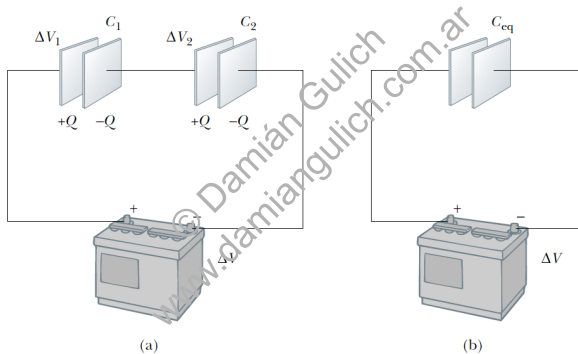
$$\begin{aligned} Q_{\text{total}} &= Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V \\ &= (C_1 + C_2) \Delta V \\ &= C_{eq} \Delta V \end{aligned}$$

Capacitores en paralelo

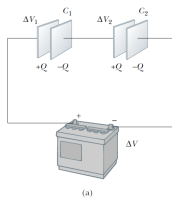
Si los capacitores $C_1, \dots, C_N$ están todos en paralelo, su capacidad equivalente es

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (6)$$

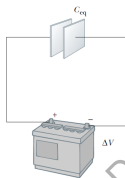
Capacitores en serie



Capacitores en serie (2)



(a)



(b)

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V$$

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Capacitores en serie

Si los capacitores $C_1, \dots, C_N$ están todos en serie, su capacidad equivalente se halla con

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (7)$$

Dieléctricos

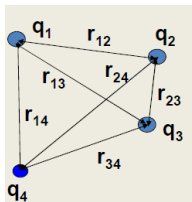
- A los materiales no conductores (vidrio, papel, madera, etc.) se los suele denominar *dieléctricos*.
- Si el espacio entre las placas de un capacitor se llena con dieléctrico, la capacidad aumenta en un factor κ que es característico del dieléctrico según $\epsilon = \kappa\epsilon_0$.
- En la práctica la mayoría de los capacitores posee un material dieléctrico entre sus placas conductoras.

Para qué se ponen dieléctricos en los capacitores comerciales

- Permiten disminuir la separación entre placas (mecánico).
- Muchos dieléctricos toleran mayores diferencias de potencial que el aire antes de que salte una descarga entre las placas.
- La capacidad aumenta en un factor κ . En el caso del capacitor de placas paralelas

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} = \kappa C_0$$

Una forma más refinada para la energía almacenada en un sistema de cargas



Energía almacenada en un sistema de N cargas fijas

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_1}{r_{12}} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (8)$$

Una generalización a conductores cargados

Recordando que

$$V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

el resultado (8) puede expresarse así:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

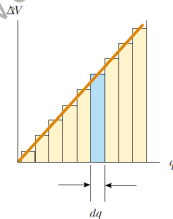
Si tenemos N conductores, cada uno con carga Q_i y potencial V_i , entonces

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

Almacenamiento de energía en un capacitor

- Supongamos una carga q en el capacitor en un momento dado.
- En ese momento la diferencia de potencial entre las placas es $\Delta V = q/C$.
- Ahora, el trabajo hecho por la batería para llevar una pequeña carga dq desde la chapa (-) a la chapa (+) (que es la de mayor potencial) es

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$



Almacenamiento de energía en un capacitor (2)

- El trabajo total para cargar el capacitor desde $q = 0$ hasta $q = Q$ es

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

- El trabajo hecho al cargar el capacitor aparece como energía potencial U almacenada en el capacitor.

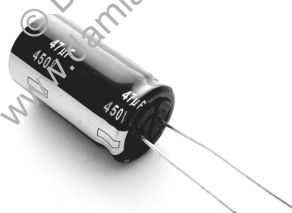
Energía almacenada en un capacitor

Dado un capacitor de capacitancia C , entre cuyas placas hay una diferencia de potencial ΔV , la energía potencial almacenada en éste y sus formas equivalentes son

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (9)$$

Almacenamiento de energía en un capacitor (3)

- En la práctica hay un límite a la energía que puede almacenarse en un capacitor.
- Este límite se encuentra cuando ΔV es tan grande que se produce una descarga entre las placas.
- Por este motivo los capacitores se comercializan indicando la tensión máxima que soportan sin riesgo de descarga.



Densidad de energía eléctrica en un capacitor de placas plano paralelas

- Podemos pensar que la energía que hemos guardado en el capacitor está guardada en el campo eléctrico establecido entre las placas cuando está cargado.
- Esto es razonable porque el campo eléctrico es proporcional a la carga en el capacitor por la relación $\Delta V = Ed$
- Por la relación (4): $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$
- Poniendo ambas relaciones en la relación de energía (9):

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (Ad) E^2$$

- Pero Ad no es ni más ni menos que el volumen entre las placas donde está E , por lo tanto podemos definir la densidad de energía eléctrica como

$$u_E = \frac{U}{\text{Vol}} = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (10)$$

Densidad de energía eléctrica, en general

A pesar de que el resultado (10) fue para un capacitor de placas plano paralelas, es una expresión generalmente válida, por lo que entonces hacemos la siguiente definición:

Densidad de energía eléctrica

Dado un campo eléctrico $\vec{E}$ en el espacio (con módulo E), la *densidad de energía eléctrica* es

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (11)$$

Este resultado será de mucha utilidad cuando veamos ondas electromagnéticas.

Preguntas

Preguntas

© Damían Gulich
www.damiangulich.com.ar