

01.04. Trabajo electrostático y potencial

Damián Gulich^{1,2}

¹Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

²Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

- 1 La energía potencial electrostática (U)
- 2 El potencial electrostático (V)

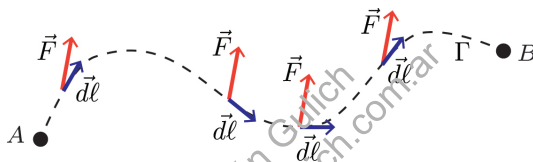
Alessandro Volta



Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta.

Nacimiento	18 de febrero de 1745 Ducado de Milán
Fallecimiento	5 de marzo de 1827 (82 años) Como, Reino de Lombardía-Venecia
Lugar de sepultura	Camnago Volta (Italia)
Residencia	Italia
Nacionalidad	italiana
Información profesional	
Área	electromagnetismo, química, física
Conocido por	Invencción de la pila eléctrica Descubrimiento del metano
Empleador	Universidad de Pavia
Miembro de	Academia Prusiana de las Ciencias Real Academia de Artes y Ciencias de los Países Bajos Academia de Ciencias de Baviera Academia de Ciencias de Francia
Distinciones	Caballero de la Legión de Honor Miembro de la Royal Society Medalla Copley (1794)

El trabajo de una fuerza



Recordemos que el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ a lo largo de una trayectoria Γ es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} \quad (1)$$

donde $\vec{F}$ debe calcularse sobre cada punto de Γ y $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$ es la proyección de $\vec{F}$ en la dirección de $d\vec{\ell}$. Este resultado da un escalar.

Dos trayectorias



Dadas dos trayectorias distintas Γ_1 y Γ_2 con los mismos puntos extremos, en general se cumple que

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} \neq \int_{\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

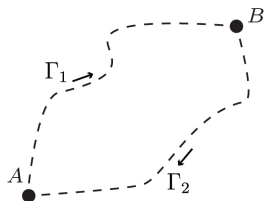
ya que la integral puede depender del camino.

Fuerzas conservativas

Hay casos especiales en los que se cumple que

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

para *cualquiera* trayectorias distintas Γ_1 y Γ_2 con los mismos puntos extremos; es decir que el trabajo $W_{A \rightarrow B}$ sólo depende de A y B , no de la trayectoria. Si vamos y volvemos, entonces



Fuerza conservativa

Decimos que la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativa si para toda curva cerrada Γ

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (2)$$

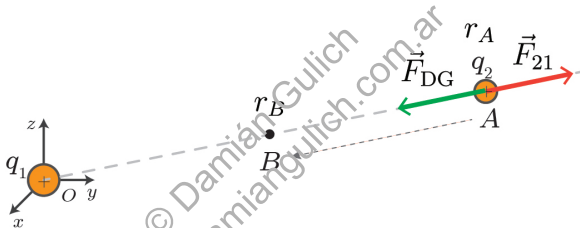
¿La fuerza de Coulomb es conservativa?



Supongamos una carga q_1 fija en el origen y otra carga q_2 cualquiera inicialmente en el punto A (ambas cargas son positivas). En general q_2 experimenta una fuerza coulombiana repulsiva de la forma

$$\vec{F}_{21}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (3)$$

El trabajo hecho por la fuerza de Coulomb radialmente



Ahora Damián Gulich se propone mover esa carga q_2 *cuasiestáticamente* en dirección radial hasta el punto B más cercano. Se realizará un trabajo externo sobre el sistema.

El trabajo hecho por la fuerza de Coulomb radialmente (3)

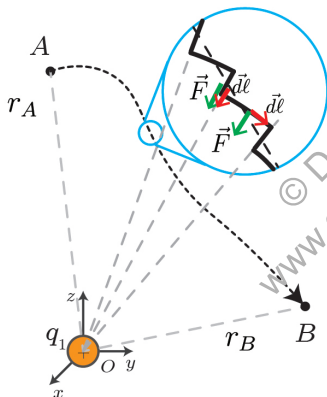
El trabajo calculado en (4) es función de los puntos inicial y final. A menudo se dice que el punto de inicio A a distancia r_A de la carga q_1 se conoce como *referencial*.

Un caso muy importante es cuando se toma como referencial el infinito ($r_A \rightarrow \infty$). En esas condiciones el trabajo realizado W_{DG} queda biunívocamente definido por el punto final a distancia r_B :

$$\begin{aligned} W_{DG} &= \int_{\infty}^{r_B} \vec{F}_{DG}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_B}^{\infty} \vec{F}_{21}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \dots \\ &= - \int_{\infty}^{r_B} \vec{F}_{21}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

es decir, que a cada punto del espacio a distancia r_B de q le queda asignado un trabajo para poner allí la carga q_1 .

¡La fuerza de Coulomb es conservativa!



Cualquier trayectoria de forma arbitraria entre A y B puede descomponerse en segmentos pequeños que son

- orbitales, donde la fuerza coulombiana es **PERPENDICULAR** al desplazamiento. En estos tramos el trabajo es **CERO** pues $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = 0$
- radiales, donde la fuerza es **PARALELA** al desplazamiento

Entonces el trabajo realizado termina siendo sólo el que calculamos radialmente en (4) y es para **CUALQUIER** trayectoria con esos extremos, entonces **la fuerza de Coulomb es conservativa, y por lo tanto tiene asociada una energía potencial.**

El trabajo y la energía potencial electrostática

Como la fuerza de Coulomb es conservativa, a este sistema hay asociada una energía potencial U . De (4):

$$W_{DG} = \int_{r_B}^{r_A} \vec{F}_{21}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} \right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} \right) = \Delta U \quad (6)$$

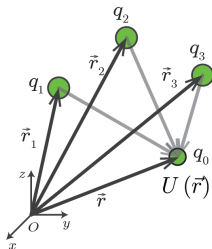
donde U (que es escalar, y medida en J) es la *energía potencial electrostática*. Esto es un campo escalar referido a un referencial. Si el referencial es el infinito ($r_A \rightarrow \infty$), podemos decir por (5) que la energía potencial queda definida para cualquier punto del espacio a distancia r de q y en ese caso podemos obviar la Δ en (6) y

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (7)$$

Nótese que $U(\infty) = 0$.

Principio de superposición

Si hay fijo un sistema de N cargas en el espacio, podemos usar el principio de superposición para decir la energía necesaria para traer una carga q_0 desde el infinito hasta un punto $\vec{r}$.

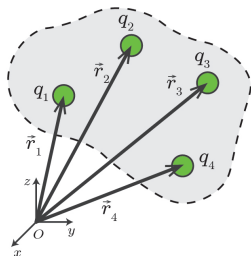


Energía potencial electrostática de una carga frente a un sistema

$$U(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \quad (8)$$

La energía de un sistema de cargas

Si se va a construir sistema de N cargas que quedarán fijas en el espacio, podemos usar el principio de superposición para decir la energía almacenada trayendo cada una desde el infinito hasta su punto final $\vec{r}_i$.



Energía electrostática de un sistema de cargas.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} \quad (9)$$

La relación entre U y $\vec{F}$

Por definición de U ,

$$\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -dU$$

$$\begin{aligned} \langle F_x; F_y; F_z \rangle \cdot \langle dx; dy; dz \rangle &= - \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right\} \\ &= - \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle dx; dy; dz \rangle \\ &= -\nabla U \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

la fuerza INTERNA se puede hallar como

$$\vec{F} = -\nabla U = - \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\rangle \quad (10)$$

donde, por ejemplo, $\partial/\partial x$ significa derivar respecto de x manteniendo y y z como constantes. Para poder cumplir con esta definición, se pide entonces que U sea una función continua. La fuerza apunta hacia los mínimos del potencial.

El trabajo por unidad de carga

En el trabajo radial podemos recordar que por definición $\vec{F} = q_2 \vec{E}$

$$\begin{aligned} W_{\text{DG}} &= \dots = \int_{r_B}^{r_A} \vec{F}_{21}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q_2 \int_{r_B}^{r_A} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= -q_2 \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \Delta U \end{aligned}$$

donde $\vec{E}_1$ es el campo de la partícula fija q_1 y ΔU es la variación de la energía potencial electrostática. Si hacemos el cociente

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_2}$$

Entonces, ΔV es el trabajo por unidad de carga que se ha hecho.

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

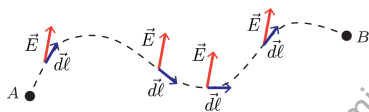
Unidades de ΔV

Las unidades de ΔV son unidades de energía por unidad de carga:

$$[\Delta V] = \frac{J}{C} = V$$

donde V se conoce como “volt” y es una unidad muy conveniente.

La diferencia de potencial ΔV



Diferencia de potencial

Dado un campo $\vec{E}$, un punto inicial A y un punto final B , la diferencia de potencial entre esos puntos es

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (11)$$

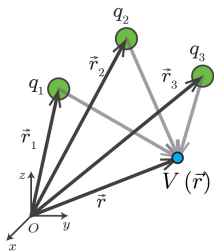
El potencial electrostático

Si el referencial es el infinito ($r_A \rightarrow \infty$), en (7) encontramos que $U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ y si dividimos por q_2 , entonces encontramos un campo escalar de energía por unidad de carga para todo punto del espacio de la forma

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Nótese que $V(\infty) = 0$. A esta función se la llama *potencial electrostático*, o *potencial eléctrico* (a veces “potencial absoluto”).

El potencial electrostático y el principio de superposición

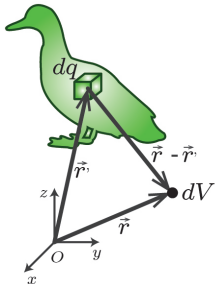


El principio de superposición para el potencial electrostático (cargas puntuales)

Dado un sistema de referencia O y N cargas fijas (acotadas en el espacio), una buena elección es tomar el referencial en el infinito ($r_A \rightarrow \infty$). Así, el potencial en una posición $\vec{r}$ es el potencial electrostático aportado por cada una de las cargas individuales según:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \quad (12)$$

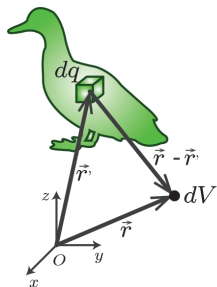
El potencial electrostático y las distribuciones de carga acotadas



- ¿Cómo se determina el potencial electrostático de una distribución continua de cargas ACOTADAS en el espacio; por ejemplo, la de un cuerpo extenso cargado?
- R: Usando el principio de superposición. Primero consideremos un pequeño elemento de carga dq (fuente) ubicado en la posición $\vec{r}'$. La pequeña contribución de potencial de este elemento vista en $\vec{r}$ es

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

El potencial eléctrico y las distribuciones de carga acotadas (2)



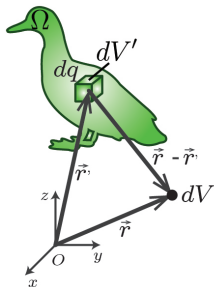
Principio de superposición para distribuciones de carga

Dado un sistema de referencia O y N cargas fijas (acotadas en el espacio), una buena elección es tomar el referencial en el infinito ($r_A \rightarrow \infty$). Así,

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (13)$$

Veremos cómo se puede calcular esto en varios casos sencillos.

El potencial electrostático y las distribuciones de carga acotadas (2)



Principio de superposición para distribuciones de carga sabida la distribución de carga

Dado un sistema de referencia O y N cargas fijas (acotadas en el espacio), una buena elección es tomar el referencial en el infinito ($r_A \rightarrow \infty$). Si se sabe la distribución de carga $\rho(\vec{r}')$ entonces por $dq \doteq \rho(\vec{r}') dV'$ (donde dV' es un diferencial de volumen, no confundir) y por lo tanto (13) queda,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (14)$$

donde Ω es el volumen en el que hay cargas.

¿Qué se hace si la distribución de cargas no está acotada?

Si la distribución de cargas NO está acotada como lo pueden ser por ejemplo

- líneas infinitas de carga
- planos infinitos
- volúmenes infinitos

en estos casos sí se puede saber por Gauss la forma de $\vec{E}$ en todo el espacio. Con esa información, siempre podrá calcularse fijarse un referencial A arbitrario (o conveniente) en la definición (11):

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Nótese que siempre $V(A) = 0$.

El camino inverso: si se sabe V hallar $\vec{E}$

Dada la relación (10) entre la fuerza interna y U y recordando que $\vec{F} = q\vec{E}$ y que por definición $qV = U$,

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$q\vec{E} = -\nabla U$$

entonces

$$\vec{E} = -\frac{\nabla U}{q} = -\nabla \left(\frac{U}{q} \right) = -\nabla V$$

El camino inverso: si se sabe V hallar $\vec{E}$ (2)

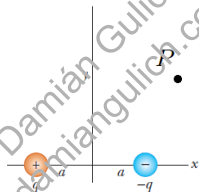
Hallar $\vec{E}$ dado V

Sabido el potencial electrostático $V(x; y; z)$ entonces

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (15)$$

Cálculo de potenciales electrostáticos (1)

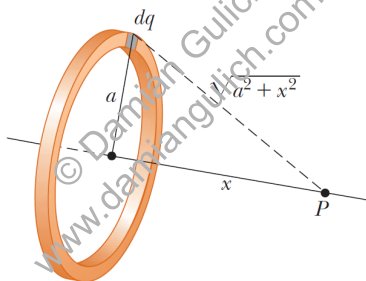
Potencial sobre el plano xy debido a un dipolo (sobre el eje z). Las cargas son $\pm q$ a una distancia a del origen y están sobre el eje x .



$$V(x; y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right]$$

Cálculo de potenciales electrostáticos (2)

Potencial electrostático sobre el eje de un anillo delgado de radio a y uniformemente cargado (carga total Q). El anillo está sobre el plano yz



$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Preguntas

Preguntas

© Damían Gulich
www.damiangulich.com.ar