

01.03. Ley de Gauss

Damián Gulich^{1,2}

¹Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

²Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

- 1 Flujo de campos
- 2 La Ley de Gauss para el campo eléctrico

Ley de Gauss

La Ley de Gauss es esencialmente una técnica para calcular el campo eléctrico promedio en una superficie cerrada, desarrollada por Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Cuando el campo eléctrico, debido a su simetría, es constante en todas partes en esa superficie y perpendicular a él, se puede encontrar el campo eléctrico exacto. En tales casos especiales, la ley de Gauss es mucho más fácil de aplicar que la ley de Coulomb.

Gauss

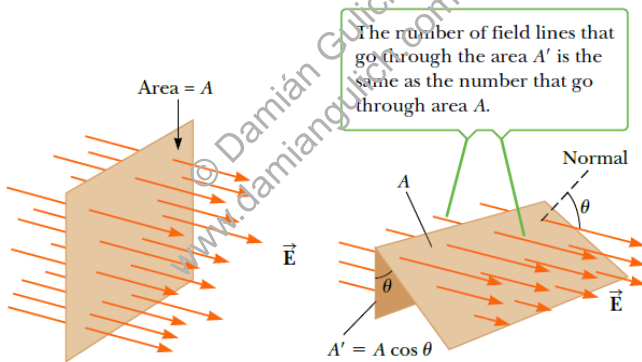


Retrato de Carl Friedrich Gauss, por Christian Albrecht Jensen (1840).

Información personal	
Nombre de nacimiento	Johann Carl Friedrich Gauss
Nombre en alemán	Carl Friedrich Gauß
Nacimiento	30 de abril 1777 Brunswick, Sacro Imperio Romano Germánico, (Principado de Brunswick-Wolfenbüttel)
Fallecimiento	23 de febrero 1855 (77 años) Gotinga, Reino de Hanóver
Lugar de sepultura	Albanfriedhof (Alemania)
Residencia	Reino de Hanóver
Nacionalidad	Confederación del Rin, Confederación Germánica y Reino de Hanóver
Religión	Luteranismo
Familia	
Cónyuge	Johanna Osthoff Mina Waldeck
Educación	
Educado en	Universidad de Helmstedt
Supervisor doctoral	Johann Friedrich Pfaff
Información profesional	
Área	Matemático y físico

El flujo de un campo vectorial

El flujo de un campo vectorial es una medida de cuánto penetran los vectores de campo a través de una superficie dada. Puede entenderse como una medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesan una superficie.



Flujo de un campo vectorial (repaso)

Definiciones

Sea S una superficie y $\vec{E}$ un campo vectorial. Definimos el flujo de $\vec{E}$ a través de S como:

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA \quad (1)$$

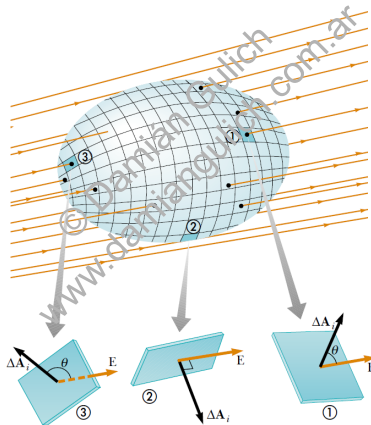
Recuérdese que, por la definición de producto escalar,

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \|\vec{E}\| \|\vec{n}\| \cos(\theta) dA = \|\vec{E}\| \cos(\theta) dA$$

pues $\|\vec{n}\| = 1$ y donde θ es el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{n}$.

El flujo de un campo vectorial

Si los vectores de campo son tangentes a la superficie en todos los puntos, por ejemplo, no penetran en la superficie y el flujo a través de la superficie es cero.

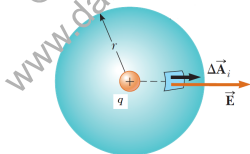


Una carga puntual (+) y una superficie esférica

- Tomemos (como adultos) $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$
- Supongamos una carga puntual $+q$ en el origen para la que vimos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

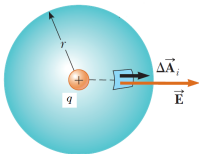
- Sea S_1 una superficie esférica centrada en el origen de radio r .



Una carga puntual y una superficie esférica (flujo saliente)

- Si tomamos las normales *salientes* de S_1 : $\vec{n} = \vec{r}$, entonces podemos calcular el flujo $\Phi_{\vec{E}}(S_1)$:

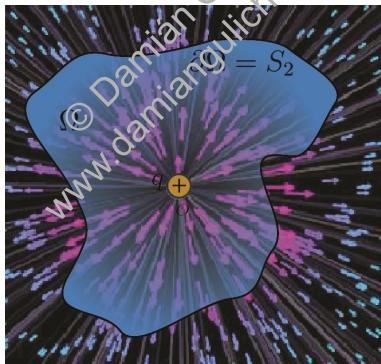
$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}}(S_1) &= \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \\ &= \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{r}) dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oiint_{S_1} dA = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \boxed{\frac{q}{\epsilon_0}}\end{aligned}$$



Una carga puntual en una superficie arbitraria cerrada

Supongamos una región volumétrica irregular Ω , cuya frontera $(\partial\Omega)$ es la superficie cerrada S_2 . ¿Cómo podemos calcular el flujo del campo eléctrico para una carga puntual a través de esta superficie?

$$\Phi_{\vec{E}}(S_2) = ?$$



Una carga puntual en una superficie arbitraria cerrada (2)

Cavemos en Ω una burbuja esférica de radio r centrada en la carga a la que llamaremos S_1 .



Calculemos el flujo NETO a través de la región Ω (sombreada):

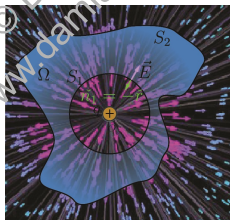
$$\Phi_{\vec{E}}^{\text{NETO}} = \Phi_{\vec{E}}(S_1) + \Phi_{\vec{E}}(S_2) = ?$$

Una carga puntual en una superficie arbitraria cerrada (3)

- Una buena noticia: notemos que a la región Ω entran tantas líneas de campo por S_1 como las que salen por S_2 , por lo tanto

$$\Phi_{\vec{E}}^{\text{NETO}} = \Phi_{\vec{E}}(S_1) + \Phi_{\vec{E}}(S_2) = 0 \quad (2)$$

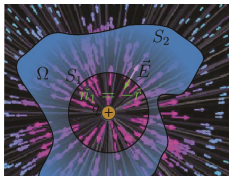
- Otra buena noticia: ya sabemos calcular explícitamente $\Phi_{\vec{E}}(S_1)$.



Una carga puntual en una superficie arbitraria cerrada (4)

- Como hicimos antes, podemos calcular explícitamente el flujo $\Phi_{\vec{E}}(S_1)$ tomando en este caso las normales *entrantes* de S_1 : $\vec{n} = -\vec{r}$, entonces:

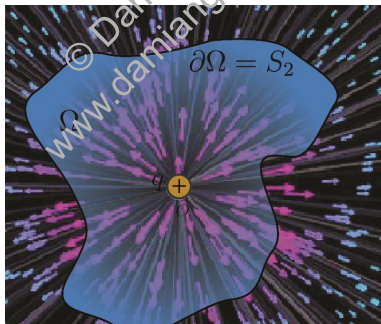
$$\begin{aligned}
 \Phi_{\vec{E}}(S_1) &= \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \\
 &= \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (\vec{r} \cdot (-\vec{r})) dA = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oiint_{S_1} dA = \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \boxed{-\frac{q}{\epsilon_0}} \quad (3)
 \end{aligned}$$



Una carga puntual en una superficie arbitraria cerrada (5)

Ahora incorporemos el resultado (3) en nuestro artilugio original (2):

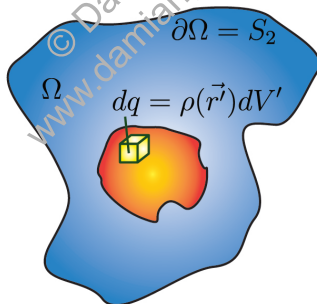
$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}}(S_1) + \Phi_{\vec{E}}(S_2) &= -\frac{q}{\epsilon_0} + \Phi_{\vec{E}}(S_2) = 0 \\ \Rightarrow \Phi_{\vec{E}}(S_2) &= \oint\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad (4)$$



Distribuciones más complicadas

El resultado (4) vale para una carga puntual q encerrada en la región Ω . Pero lo mismo vale si utilizamos una pequeña carga dq . Si, como vimos antes, las posiciones de las cargas están resumidas por cierta distribución de cargas $\rho(\vec{r}')$, entonces

$$dq = \rho(\vec{r}') dV'$$



Distribuciones más complicadas (2)

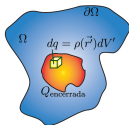
Sin perder generalidad, podemos usar el principio de superposición y sumar todas las cargas contenidas en Ω (o encerradas por $\partial\Omega$):

$$Q_{\text{encerrada}} = \int dq \equiv \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) dV'$$

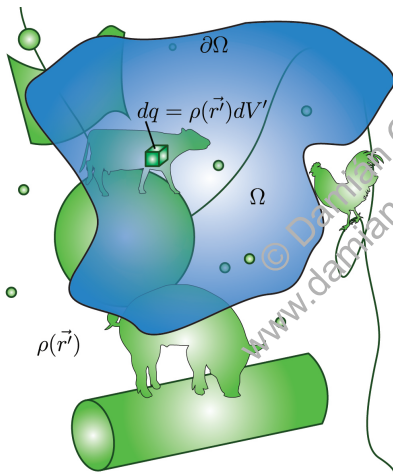
Entonces el flujo a través de la superficie es, por (4):

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}') dV'$$

Este resultado es conocido como *Ley de Gauss para el campo eléctrico*.



Ley de Gauss para el campo eléctrico



Ley de Gauss para el campo eléctrico

Dada una región del espacio Ω limitada por cualquier superficie cerrada simple $\partial\Omega$ y dada una distribución de cargas $\rho(\vec{r}')$:

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}') dV' \quad (5)$$

Ésta es una *forma integral*.

Utilidad de la Ley de Gauss

- En la última clase, mostramos cómo calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga dada.
- La Ley de Gauss se basa en el comportamiento del cuadrado inverso de la fuerza eléctrica entre cargas puntuales.
- Aunque la ley de Gauss es una consecuencia de la ley de Coulomb, es más conveniente para calcular los campos eléctricos de distribuciones de carga altamente simétricas y hace posible tratar problemas complicados usando razonamiento cualitativo.

¿En qué condiciones se puede hallar $\vec{E}$ con la Ley de Gauss?

¿En qué condiciones de las que veremos se puede hallar $\vec{E}$ con la Ley de Gauss (lado izquierdo de (5))?

Al elegir la superficie, siempre debe aprovecharse la simetría de la distribución de carga para que E pueda eliminarse de la integral. El objetivo en este tipo de cálculo es determinar una superficie tal que cada porción de la misma satisfaga una o más de las siguientes condiciones:

- 1 Por alguna simetría puede argumentarse que el valor del campo eléctrico es constante sobre cada porción de la superficie.
- 2 El producto escalar en la $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ se puede expresar como un producto algebraico simple $E dA$ porque $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ son paralelos (o mantienen un ángulo constante entre sí).
- 3 El producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ es cero porque $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ son perpendiculares.
- 4 El campo eléctrico es cero sobre cada porción de la superficie.

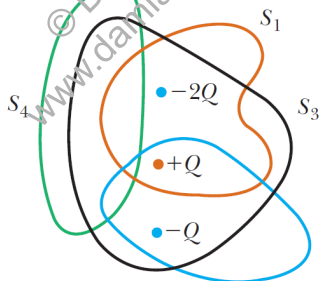
¿Cuáles superficies son las más usuales?

En general recurriremos a cilindros y esferas, dependiendo de la geometría del problema. Queda claro que se deberá acudir a los respectivos juegos de coordenadas de cada caso.

¿Qué se puede hacer si las recomendaciones anteriores fallan?

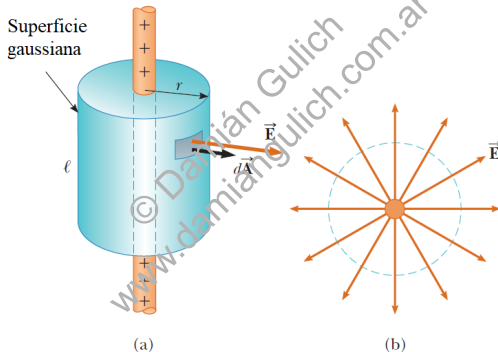
IMPORTANTE: Si las recomendaciones anteriores fallan, SIEMPRE se podrá calcular el valor del flujo neto $\Phi_{\vec{E}}$ con la parte derecha de la Ley de Gauss, pero NO el campo:

$$\Phi_{\vec{E}}(\partial\Omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) dV = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$



Ejemplo: Un alambre infinito cargado

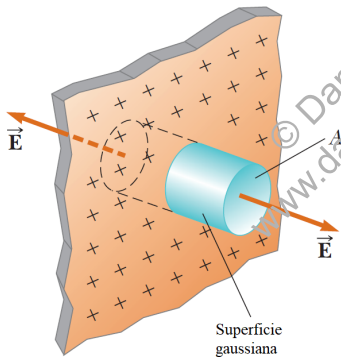
Un alambre infinito sobre el eje z tiene carga uniforme con densidad λ . Hallar $\vec{E}(r)$ (coordenadas cilíndricas).



$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

Ejemplo: Un plano infinito cargado

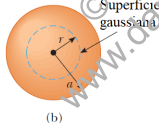
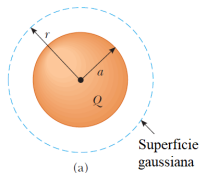
Un plano infinito en $x = 0$ (sobre el plano yz) tiene una carga uniformemente distribuida con densidad superficial $\sigma > 0$ constante. Hallar $\vec{E}(x)$ (queda en coordenadas cartesianas, pero se puede usar una superficie cilíndrica).



$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{signo}(x) \check{i}$$

Ejemplo: Una esfera aislante con una carga Q

Una esfera aislante de radio a está centrada en el origen y tiene una carga total Q uniformemente distribuida en su interior. Hallar $\vec{E}(r)$ (coordenadas esféricas).



$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r}{a^3} \hat{r} & \text{si } r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

La Ley de Gauss en forma diferencial (puntual)

El Teorema de Gauss (Matemática B, ver “Herramientas matemáticas”) dice lo siguiente:

Sea Ω una región compacta del espacio y sea $\partial\Omega$ la superficie cerrada que la limita. Si $\vec{E}$ es un campo vectorial diferenciable en esa región, entonces

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{E}) dV' \quad (6)$$

Comparémoslo término a término con la Ley de Gauss (5):

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}') dV'$$

Los lados izquierdos son idénticos, veamos los lados derechos.

La Ley de Gauss en forma diferencial (puntual) (2)

$$\begin{aligned}\dots &= \iiint_{\Omega} \underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{= \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0}} dV \\ \dots &= \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} dV'\end{aligned}$$

Ley de Gauss en forma diferencial (puntual)

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0}} \quad (7)$$

Esta es la *forma local* o *diferencial* de la Ley de Gauss y será de muchísima utilidad más adelante.

Preguntas

Preguntas

© Damían Gulich
www.damiangulich.com.ar