Problemas sobre Sección eficaz

Damian Gulich*
(Departamento de Física - UNLP)

27 de junio de 2005

1) Un cometa (que podemos considerar puntual) de masa m se mueve en el campo gravitacional del Sol de masa M y radio R. ¿Cuál es la sección eficaz total para la caída del cometa en el Sol?
b) Una estrella de masa M y radio R se mueve con velocidad v a través de una nube de partículas de densidad de masa η. Si todas las partículas que chocan con la estrella son incorporadas a ella, demostrar que la masa de la estrella aumenta al ritmo

$$\frac{dM}{dt} = \eta v \left(1 + \frac{GM}{Rv^2}\right) \pi R^2$$

Solución:
a) Estamos tratando con un potencial central de la forma

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

donde $k = GMm$. Por tratarse de un potencial central, el movimiento de la partícula está confinado a un plano. Por lo tanto, podemos escribir el problema en coordenadas polares. La lagrangiana en polares es de la forma

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r}$$

Como $\partial L/\partial\theta = 0$, entonces $p_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} =$ const. Además, $\partial L/\partial t = 0 = -dH/dt$, con lo cual $H = E =$ const. La hamiltoniana es de la forma

$$H = E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

El impulso angular l tiene en todo momento el valor $l = mv_\infty\rho$, donde ρ es el parámetro de impacto. Si imponemos además que para un impacto contra el sol a lo sumo $r_{min} = R$ y que al momento del impacto $\dot{r} = 0$

$$E = \frac{mv_\infty^2\rho^2}{2R^2} - \frac{k}{R}$$

de donde puede despejarse ρ^2 como

$$\rho^2 = \left(E + \frac{k}{R}\right)\frac{2R^2}{mv_\infty^2} = \left(\frac{1}{2}mv_\infty^2 + \frac{GMm}{R}\right)\frac{2R^2}{mv_\infty^2} = \left(1 + \frac{GM}{Rv_\infty^2}\right)R^2$$

Todos los cometas que lleguen con parámetros de impacto menores a ρ colisionarán, y el resto no. Por lo tanto, la sección eficaz total para la caída del cometa en el Sol es

$$\boxed{\pi\rho^2 = \left(1 + \frac{GM}{Rv_\infty^2}\right)\pi R^2} \tag{1}$$

*d_gulich@yahoo.com

b) Desde el punto de vista de la estrella, hay una nube de cometas que se acercan con velocidad v, la interacción es puramente gravitatoria, y su sección eficaz es la calculada en (1). La cantidad de cometas que en un tiempo dt están contenidos en el cilindro de sección transversal $\pi\rho^2$ y de grosor vdt es

$$\eta v \pi \rho^2 dt$$

y representan el incremento dM en la masa del sol. La expresión para la tasa de cambio de la masa del sol es, por lo tanto:

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \eta v \left(1 + \frac{GM}{Rv^2}\right) \pi R^2} \tag{2}$$

2) Hallar la relación entre las secciones eficaces en los sistemas LAB y CM para el problema de dispersión por un potencial central.

Solución:

Si la cantidad de partículas dispersadas es la misma en ambos sistemas de referencia,

$$\underbrace{\sigma(\theta)\, d\Omega}_{\text{LAB}} = \underbrace{\sigma(\chi)\, d\Omega'}_{\text{CM}}$$

Por consiguiente

$$\sigma(\theta)\, 2\pi \sin(\theta)\, d\theta = \sigma(\chi)\, 2\pi \sin(\chi)\, d\chi$$

de donde se puede despejar $\sigma(\varphi)$ como

$$\sigma(\theta) = \sigma(\chi) \frac{\sin(\chi)}{\sin(\theta)} \frac{d\chi}{d\theta}$$

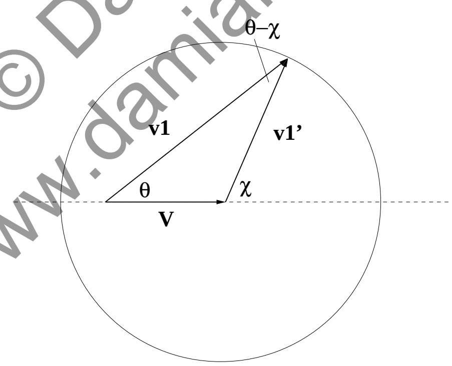

Figura 1: Problema 2.

De acuerdo con la figura, y applicando el teorema del seno al triángulo: $V / \sin(\theta - \chi) = v_1' / \sin(\theta)$, y por lo tanto

$$\frac{\sin(\theta - \chi)}{\sin(\theta)} = \frac{V}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2} = x \tag{3}$$

De donde se puede establecer que

$$\chi = \arcsin[x \sin(\theta)] + \theta \tag{4}$$

$$\cos(\chi - \theta) = \sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)} \tag{5}$$

Para despejar $\frac{d\chi}{d\theta}$, En la ecuación (3) diferenciamos y recordamos el valor de x para obtener después de simplificar

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \frac{\sin(\chi)}{\cos(\chi - \theta)\sin(\theta)}$$

de donde

$$\sigma(\theta) = \sigma(\chi)\frac{\sin(\chi)}{\sin(\theta)}\frac{\sin(\chi)}{\cos(\chi-\theta)\sin(\theta)} = \sigma(\chi)\frac{1}{\cos(\chi-\theta)}\left(\frac{\sin(\chi)}{\sin(\theta)}\right)^2$$

Si en (3) despejamos explícitamente $\sin\chi/\sin\theta$ en términos de x, obtenemos:

$$\frac{\sin(\chi)}{\sin(\theta)} = x\cos(\theta) + \cos(\chi - \theta)$$

Teniendo en cuenta además (5), la expresión para la sección eficaz deseada se puede despejar finalmente como:

$$\boxed{\sigma(\theta) == \sigma(\chi)\frac{\left[x\cos(\theta) + \sqrt{1 - x^2\sin^2(\theta)}\right]^2}{\sqrt{1 - x^2\sin^2(\theta)}}} \tag{6}$$

6) Demostar que la sección eficaz diferencial evaluada en el sistema de referencia del CM, para la dispersión de partículas por el potencial $U(r) = k/2r^2$, viene dada por la expresión:

$$d\sigma(\chi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\chi)}\frac{k}{2E}\left(\frac{\pi}{\chi}\right)^2\frac{(\pi-\chi)}{(2\pi-\chi)^2}d\chi$$

donde E es la energía de la partícula dispersada.

Solución:

Se calcula el ángulo de dispersión en el potencial mediante

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|$$

donde

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty}\frac{\rho}{r\sqrt{r^2\left[1 - \frac{U(r)}{E}\right] - \rho^2}}dr = \int_{r_0}^{\infty}\frac{\rho}{r\sqrt{r^2\left[1 - \frac{k}{2r^2E}\right] - \rho^2}}dr = \int_{r_0}^{\infty}\frac{\rho}{r\sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2E} + \rho^2\right)}}dr$$

Donde r_0 es la solución positiva de $r^2 - \left(\frac{k}{2E} + \rho^2\right)$, es decir

$$r_0 = \sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2} \tag{7}$$

Se sabe que

$$\int\frac{dr}{r\sqrt{Ar^2 + Br + C}} = \frac{1}{\sqrt{-C}}\operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{Br + 2C}{r\sqrt{B^2 - 4AC}}\right]$$

si $C < 0$ y $B^2 > 4AC$. En este caso, $A = 1$, $B = 0$ y $C = -\left(\frac{k}{2E} + \rho^2\right)$, que obviamente lo cumplen. Por lo tanto,

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty}\frac{\rho}{r\sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2E} + \rho^2\right)}}dr = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}}\operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{-2\left(\frac{k}{2E} + \rho^2\right)}{r\sqrt{4\left(\frac{k}{2E} + \rho^2\right)}}\right]_{r_0}^{\infty} = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}}\operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{-\left(\frac{k}{2E} + \rho^2\right)}{r\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}}\right]_{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}}^{\infty}$$

Lo cual da

$$\varphi_0 = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} \left\{ \operatorname{sen}^{-1}(0) - \operatorname{sen}^{-1}(-1) \right\} = \frac{\pi}{2} \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}}$$

Luego

$$\chi = \pi - \pi \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} = \pi \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} \right) \tag{8}$$

La forma general de la sección eficaz en el CM era

$$d\sigma(\chi) = \frac{\rho}{\operatorname{sen}(\chi)} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

Resta ahora despejar ρ de la ecuación 8:

$$\frac{(\pi - \chi)^2}{\pi^2} \left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right) = \rho^2 \Longrightarrow \frac{k}{2E} + \rho^2 = \rho^2 \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2}$$

$$\rho(\chi) = \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{(\pi-\chi)^2} - 1}} \tag{9}$$

Ahora,

$$\left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| = \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{(\pi-\chi)^2} - 1 \right]^{3/2}} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3}$$

con lo cual podemos finalmente computar la sección eficaz diferencial deseada.

$$d\sigma(\chi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\chi)} \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{(\pi-\chi)^2} - 1}} \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{(\pi-\chi)^2} - 1 \right]^{3/2}} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3} d\chi$$

$$d\sigma(\chi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{(\pi-\chi)^2} - 1 \right]^2} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3} d\chi = \frac{1}{\operatorname{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{(\pi - \chi)^4}{\left[\pi^2 - (\pi - \chi)^2 \right]^2} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3} d\chi =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{(\pi - \chi)}{\left[\pi^2 - \pi^2 + 2\pi\chi - \chi^2 \right]^2} \pi^2 d\chi = \frac{1}{\operatorname{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{(\pi - \chi)}{\theta^2 \left[2\pi - \chi \right]^2} \pi^2 d\chi$$

De donde finalmente

$$\boxed{d\sigma(\chi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \left(\frac{\pi}{\chi} \right)^2 \frac{(\pi - \chi)}{(2\pi - \chi)^2} d\chi}$$

que es lo que se quería demostrar.